

**Weierstraßpunkte
kompakter Riemann'scher Flächen
vom Geschlecht 3**

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen - Nürnberg
zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Ernst Lugert
aus Bamberg

1901

**Weierstraßpunkte
kompakter Riemann'scher Flächen
vom Geschlecht 3**

**Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen - Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades**

**vorgelegt von
Ernst Lugert
aus Bamberg**

Als Dissertation genehmigt von den
Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 24.11.1981

Vorsitzender der Promotionskommission:

Professor Dr. H. Wegener

Erstberichterstatter:

Professor Dr. J. Köhn

Zweitberichterstatter:

Professor Dr. W. Barth

Inhaltsverzeichnis

	Seite
0 Einleitung	1
1 Theorie und Methoden	5
1.1 Weierstraßpunkte kompakter Riemann'scher Flächen	6
1.2 Die Hauptkurve einer Riemann'schen Fläche	13
1.3 Nichtsinguläre Quartiken	22
1.4 Wendepunkte und Flachpunkte	30
1.5 Invarianten	39
1.6 Geometrische Bedingungen	48
2 Familien von Quartiken mit n Flachpunkten	57
2.0	69
2.0.1 Nichtsinguläre Quartiken	69
2.1	75
2.1.1 Quartiken mit einem Flachpunkt	75
2.2	76
2.2.1 Quartiken mit 2 Flachpunkten	76
2.3 Quartiken mit 3 Flachpunkten	77
2.3.1	77
2.3.2	79
2.3.3	79
2.4 Quartiken mit 4 Flachpunkten	83
2.4.1	85
2.4.2	86
2.4.3	89
2.4.4	91
2.4.5	93
2.5 Quartiken mit 5 Flachpunkten	96
2.5.1	102
2.5.2	104
2.5.3	107
2.5.4	110

	Seite
2.5.5	113
2.5.6	116
2.6 Quartiken mit 6 Flachpunkten	120
2.6.1	128
2.6.2	131
2.6.3	134
2.6.4	137
2.6.5	139
2.6.6	140
2.7 Quartiken mit 7 Flachpunkten	141
2.7.1	149
2.7.2	150
2.7.3	151
2.7.4	155
2.7.5	159
2.8 Quartiken mit 8 Flachpunkten	164
2.8.1	167
2.8.2	170
2.8.3	171
2.9 Quartiken mit 9 Flachpunkten	172
2.9.1	175
2.9.2	176
2.9.3	179
$n \in \{10, 11, 12\}$	
2.n Quartiken mit n Flachpunkten	183
2.n.1	184
2.n.2	185
3 Literatur	186



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546216_0079

0 Einleitung

Bereits Weierstraß bemerkte die Existenz von genau g Lücken in der Polstellenhalbgruppe jedes Punktes einer Riemann'schen Fläche ($= RF$) vom Geschlecht $g \geq 2$ (Definitionen und Theorie der Weierstraßpunkte siehe in 1.1).

Von Hurwitz ist uns schon der Gewichtssatz bekannt, der einfachste Aussagen über die gegenseitigen Beeinflussungen von Polstellenhalbgruppen verschiedener Punkte auf derselben RF zuläßt (man kann sich auf die endlich vielen Weierstraßpunkte beschränken, dort ist die Halbgruppe nicht $\{g+1, g+2, \dots\}$).

Diese Beeinflussung kann extrem stark sein, denn die Existenz einer Polstellenhalbgruppe

$$\{2, 4, 6, \dots, 2g-2, 2g, 2g+1, 2g+2, 2g+3, \dots\}$$

impliziert bereits, daß in allen anderen Weierstraßpunkten dieselbe Halbgruppe vorliegt (hyperelliptischer Fall).

Über dieses Ergebnis hinaus wurde jedoch bisher meist nur untersucht, welche Polstellenhalbgruppen überhaupt auftreten können ($[Pinkham]$, $[Waldi]$).

Die Frage, welche Familien von additiven Halbgruppen natürlicher Zahlen als Polstellenhalbgruppen der Weierstraßpunkte einer RF vorkommen, war daher - außer im hyperelliptischen Fall - noch völlig offen.

Der einfachste nichthyperelliptische Fall tritt bei Geschlecht 3 auf.

Hier gibt es die Halbgruppen

$H_1 = \{3, 5, 6, 7, 8, \dots\}$ und $H_2 = \{3, 4, 6, 7, 8, \dots\}$ in Weierstraßpunkten und $H_0 = \{4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$ sonst.

Gibt es n_i Weierstraßpunkte mit der Halbgruppe H_i und damit Gewicht i , $i = 1, 2$, so ist nach Hurwitz

$$0 \leq n_1 \leq 24, \quad 0 \leq n_2 \leq 12, \quad n_1 + 2n_2 = 24,$$

es gibt also $12 \leq n_1 + n_2 \leq 24$ verschiedene Weierstraßpunkte.

Die Zahl $n_1 + n_2$ reicht daher zur vollständigen Charakterisierung aus.

Die oben gestellte Frage lautet also bei Geschlecht 3: für welche Zahlen n , $12 \leq n \leq 24$, existiert eine nichthyperelliptische RF vom Geschlecht 3 mit genau n verschiedenen Weierstraßpunkten?

In der vorliegenden Arbeit wird diese Frage beantwortet, genauer werden für jedes n mit $0 \leq n \leq 12$ i_n Familien von nichtsingulären Quartiken angegeben, so daß jede Quartik mindestens n Flachpunkte besitzt; dies sind nichthyperelliptische RF vom Geschlecht 3 mit höchstens $24 - n$ Weierstraßpunkten.

Im ersten Teil geben wir die nötigen Definitionen über Weierstraßpunkte, konkretisieren die RF durch ihre Hauptkurven, übersetzen die Termini aus der Theorie der RF in die der Theorie der algebraischen Kurven und geben Kriterien für Nicht-Singularität und Wege zur Bestimmung der Wende- und insbesondere Flachpunkte von ebenen Quartiken an.

Weiter entwickeln wir die Methoden (Invarianten und geometrische Bedingungen), die wir im zweiten Teil hauptsächlich benutzen.

Der Satz am Anfang des zweiten Teils strukturiert die dort erarbeiteten Informationen.

Wie oben bereits erwähnt, geben wir für jedes n mit $0 \leq n \leq 12$ i_n holomorphe Familien von nichtsingulären Quartiken an, sodaß jede Quartik mindestens n Flachpunkte besitzt (wobei der Terminus "holomorphe Familie" in 2 präzisiert wird).

Die erwähnten Familien können aber die Eigenschaft haben, daß jede ihrer Quartiken bereits mehr als n Flachpunkte besitzt.

Insbesondere gilt der

Satz: Es gibt keine nichtsinguläre ebene Quartik mit genau 10 oder 11 Flachpunkten.

Der Beweis ergibt sich aus der Tabelle in 2. .

Wir können mit dem in 1.2 angegebenen "Wörterbuch" die Informationen des zweiten Teils in die Sprache der RF übertragen. Dann erhalten wir eine Katalogisierung aller nichthyperelliptischen RF vom Geschlecht 3 nach der Zahl ihrer Weierstraßpunkte und nach der Existenz gewisser linearer oder quadratischer Differentialformen.

Insbesondere lautet obiger Satz dann:

Satz: Es gibt keine Riemann'sche Fläche vom Geschlecht 3 mit -

- genau 10 oder 11 Weierstraßpunkten vom Gewicht 2
- genau 13 oder 14 verschiedenen Weierstraßpunkten.

Jede RF vom Geschlecht 3 mit -

- einem Weierstraßpunkt vom Gewicht 1 besitzt mindestens 6 solche
- 10 Weierstraßpunkten vom Gewicht 2 hat 12 solche, insbesondere ist sie dann isomorph zu einer der beiden nicht isomorphen RF mit genau 12 Weierstraßpunkten, siehe 2.12 oder bei [Kuribayashi und Komiya].

Parallel zu dieser Arbeit kam, wie zwischenzeitlich bekannt wurde, L. Vermeulen in Amsterdam zu denselben Ergebnissen.

Auch gibt es mittlerweile Teilantworten zu dieser Frage bei Geschlecht 4 [Kato].

An dieser Stelle möchte ich den Herren Professoren Dr. J. Köhn und Dr. W. Barth für die Betreuung meiner Arbeit danken.

1 Theorie und Methoden

Wir erklären zunächst Weierstraßpunkte und geben einen Einblick in ihre Theorie.

Anschließend beschäftigen wir uns (in 1.2) mit Hauptkurven von RF , da wir mit dieser Konkretisierung arbeiten werden.

Um die Existenz einer nicht hyperelliptischen RF vom Geschlecht 3 nachzuweisen, werden wir nicht-singuläre Quartiken angeben. Wie man die Nicht-Singularität nachprüft, wird in 1.3 behandelt.

Sodann geben wir die Methode an, mit der wir bei gegebener nichtsingulärer Quartik die Wende- und Flachpunkte und insbesondere ihre Anzahlen bestimmen können.

In den letzten beiden Abschnitten 1.5 und 1.6 entwickeln wir die Methoden, mittels derer wir im zweiten Teil die gesuchten Quartiken konstruieren werden.

1.1 Weierstraßpunkte kompakter Riemann'scher Flächen

Sei X eine kompakte Riemann'sche Fläche (= RF),
 $P \in X$, g = Geschlecht von $X \geq 2$.

Dann gibt es eine Basis $\{w_1, \dots, w_g\}$ des Raumes $\Omega(X)$
 der holomorphen Differentialformen, so daß

$$0 = \text{ord}_P w_1 < \text{ord}_P w_2 < \dots < \text{ord}_P w_g < 2g-1.$$

Die Zahlen $\nu_i(P) := \text{ord}_P w_i + 1$, $1 \leq i \leq g$ sind nicht
 von dieser Basis abhängig.

$\{1 = \nu_1(P) < \nu_2(P) < \dots < \nu_g(P) \leq 2g-1\}$ heißt die Weier-
 straßlückenfolge im Punkt P . Diese Bezeichnung
 wird gerechtfertigt durch folgenden

Satz: Genau dann existiert eine meromorphe Funktion
 auf X , die außer in P holomorph ist und in P einen
 Pol ν -ter Ordnung besitzt, wenn ν keine Weierstraß-
 lücke ist.

Beweis: $M(X)$ sei der Raum der meromorphen Funktionen
 auf X .

Eine solche Funktion existiert genau dann, wenn
 $1 = \dim\{f \in M(X) \mid \text{ord}_P f \geq -\nu, \text{ für alle } Q \neq P \text{ ord}_Q f \geq 0\} -$
 $-\dim\{f \in M(X) \mid \text{ord}_P f \geq -\nu+1, \text{ für alle } Q \neq P \text{ ord}_Q f \geq 0\}$

Nach dem Satz von Riemann-Roch ist dies gleich

$$= \dim\{w \in \Omega(X) \mid \text{ord}_P w \geq \nu, \forall Q \neq P \text{ ord}_Q w \geq 0\} + 1 - g + \nu -$$

$$- \dim\{w \in \Omega(X) \mid \text{ord}_P w \geq \nu-1, \forall Q \neq P \text{ ord}_Q w \geq 0\} - 1 + g - \nu + 1$$

Diese Gleichheit gilt genau dann, wenn die Räume
 der holomorphen Differentialformen mit k -facher
 Nullstelle in P für $k = \nu$ und $k = \nu-1$ dieselben sind,
 es also kein $w \in \Omega(X)$ gibt mit $\text{ord}_P w = \nu-1$.

Nach Definition bedeutet das $\nu \notin \{\nu_1, \dots, \nu_g\}$.

Korollar: $N \setminus \{\nu_1, \dots, \nu_g\}$ ist eine additive Halbgruppe.

$N \setminus \{\nu_1, \dots, \nu_g\}$ sind ja genau die Polstellenordnungen
 aller Funktionen, die in P einen Pol haben und sonst

holomorph sind.

Definition Als Gewicht von P bezeichnen wir

$$\text{gew}(P) := \sum_{i=1}^g (\nu_i(P) - i).$$

P heißt Weierstraßpunkt, falls $\text{gew}(P) > 0$

(oder äquivalent: es gibt ein $i \in \{1, \dots, g\}$ mit $\nu_i > i$).

Sei $\{w_1, \dots, w_g\}$ Basis von $\Omega(X)$ und z lokale Koordinate auf X .

Sei für $i=1, \dots, g$ $w_i = f_i^{(0)} dz$ und für $j=1, \dots, g-1$ $f_i^{(j)}$ die Ableitung von $f_i^{(j-1)}$ nach der lokalen

Koordinate z .

Sei jetzt $W_z :=$ Wronskideterminante von $f_1^{(0)}, \dots, f_g^{(0)}$

$$= \det \left(f_i^{(j)} \right)_{\substack{1 \leq i \leq g \\ 0 \leq j \leq g-1}}$$

Lemma: $(F.K.Schmidt) \mathcal{W} := W_z \cdot dz^{g(g+1)/2}$ ist eine

(von z unabhängige) holomorphe Differentialform der Ordnung $g(g+1)/2$ auf X . Bei Basiswechsel

$$w'_i = \sum_{j=1}^g \lambda_{ij} w_j \quad (1 \leq i \leq g) \quad \text{gilt} \quad \mathcal{W}' = \det(\lambda_{ij}) \cdot \mathcal{W}.$$

Insbesondere hängen die Nullstellen und ihre Ordnungen nicht von der Basis ab. Die Nullstellen der Ordnung k von $\mathcal{W}$ sind genau die Weierstraßpunkte vom Gewicht k .

Beweis: (siehe auch [Forster])

Für eine zweite lokale Koordinate z' gilt:

$$W_{z'} = \left(\frac{dz'}{dz} \right)^{g(g+1)/2} \cdot W_z. \quad \text{Daher ist } \mathcal{W}' \text{ nicht von der Wahl von } z \text{ abhängig.}$$

Ein Basiswechsel bedeutet Linksmultiplikation der Wronskimatrix mit (λ_{ij}) .

Sei nun P ein Punkt mit der Lückenfolge $\{\nu_1, \dots, \nu_g\}$

und $\{w_1, \dots, w_g\}$ eine Basis von $\Omega(X)$ mit $\text{ord}_P w_i = \nu_i - 1$.

Dann beginnen die Potenzreihenentwicklungen von $f_i^{(0)}$

$$\text{mit } f_i^{(0)} = a_i z^{\nu_i - 1} + \dots \quad 1 \leq i \leq g$$

sowie $f_i^{(j)} = a_i(v_i-1)\dots(v_i-j)z^{v_i-j-1} + \dots$ $1 \leq j \leq g-1$

Die Potenzreihenentwicklung von W_z beginnt daher mit

$$\begin{vmatrix} a_1 z^{v_1-1} & a_1(v_1-1)z^{v_1-2} & \dots & a_1(v_1-1)\dots(v_1-g+1)z^{v_1-g} \\ a_2 z^{v_2-1} & \dots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_g z^{v_g-1} & \dots & a_g(v_g-1)\dots(v_g-g+1)z^{v_g-g} \end{vmatrix}$$

Jedes Monom der Entwicklung dieser Determinante hat

in z den Grad $\sum_{i=1}^g (v_i-1) = \text{gew}(P)$, also ist die Determinante gleich $a_0 z^{\text{gew}(P)}$. Als Wronskideterminante

der linear unabhängigen Funktionen $a_i z^{v_i-1}$ kann sie nicht identisch verschwinden, daher ist $a_0 \neq 0$ und

$$W_z = a_0 z^{\text{gew}(P)} + \dots$$

Also sind genau die Weierstraßpunkte Nullstellen der Ordnung $\text{gew}(P)$.

Mittels dieser Charakterisierung von Weierstraßpunkten erhalten wir die klassischen Aussagen über die Anzahl und das Gewicht von Weierstraßpunkten.

Lemma: (Hurwitz) Es gelten folgende Ungleichungen:

$$1 \leq \text{gew}(P) \leq g(g-1)/2$$

$$(g-1)g(g+1) \geq \text{Zahl der verschiedenen Weierstraßpunkte} \geq 2g+2$$

Die obere Grenze dieser Abschätzung ist zugleich die genaue Zahl der mit ihrem Gewicht gezählten Weierstraßpunkte.

Beweis: Zum Beweis der ersten Behauptung siehe z.B.

[Gunning]. Die Differentialform ω der Ordnung $g(g+1)/2$ hat mit Vielfachheit $g(g+1)/2 \cdot (2g-2) = (g-1)g(g+1)$

Nullstellen, nach dem letzten Lemma ist das die

Zahl der Weierstraßpunkte (mit Gewicht). Die zweite Ungleichung ergibt sich dann aus der ersten.

Klassisch sind auch die folgenden Aussagen, die auch zeigen, daß Weierstraßpunkte nicht nur lokale, sondern globale Bedeutung für die RF X haben.

Lemma: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) X ist hyperelliptisch, d.h. es gibt eine zwei-blättrige Überlagerung $X \rightarrow P^1$
- (ii) X hat $2g+2$ verschiedene Weierstraßpunkte
- (iii) Alle Weierstraßpunkte haben das Gewicht $g(g-1)/2$
- (iv) Ein Weierstraßpunkt hat das Gewicht $g(g-1)/2$
- (v) Für keinen Weierstraßpunkt ist 2 Lücke
- (vi) Für einen Weierstraßpunkt ist 2 keine Lücke
- (vii) Es gibt eine Involution von X , deren Fixpunkte genau die Weierstraßpunkte sind.

Weiter sind für $g > 2$ äquivalent:

- (') X ist nicht hyperelliptisch
- ('') X hat mindestens $2g+3$ Weierstraßpunkte
- ('') Es gibt einen Weierstraßpunkt, dessen Gewicht höchstens $g(g-1)/2 + (2-g)$ ist
- ('') Alle Weierstraßpunkte haben höchstens das Gewicht $g(g-1)/2 + (2-g)$.

Beweis: Die Aussagen über hyperelliptische RF sind klassisch, siehe etwa bei [Gunning], [Kato] oder [Duma]. Daher wären auch (') - (') äquivalent, wenn man als Schranke für das Gewicht $g(g-1)/2 - 1$ einsetzte.

Klar ist auch (') $\Rightarrow$ (') $\Rightarrow$ (') ($g > 2$)

(') $\Rightarrow$ (') folgt jedoch aus einem Lemma von Kato:
Seien $\{m_1, \dots, m_g\}$ die Nicht-Lücken aus $\{1, \dots, 2g\}$ im Punkt P einer nicht-hyperelliptischen Fläche, dann gilt für $j=1, \dots, g-2$ $m_j \geq 2j+1$,

$m_{g-1} \geq 2g-2$, $m_g = 2g$. Folglich ist $\sum_{i=1}^g m_i \geq g^2+2g-2$,

also $\text{gew}(P) = \text{Summe der Lücken} - g(g+1)/2 =$

$$= \sum_{i=1}^{2g} i - \sum_{i=1}^g m_i - g(g+1)/2 = \frac{3g^2}{2} + \frac{g}{2} - \sum_{i=1}^g m_i \geq \\ \geq \frac{3g^2}{2} + \frac{g}{2} - (g^2+2g-2) = g(g+1)/2 + (2-g)$$

Von [Kat] sind auch folgende Resultate bekannt:

Für einen Punkt P einer nicht-hyperelliptischen RF vom Geschlecht g gilt

falls $g \in \{3, 4, 6, 7, 9, 10\}$ $\text{gew}(P) \leq g(g-1)/3$

für sonstige $g \geq 3$ $\text{gew}(P) \leq (g^2-5g+10)/2$

Die Abschätzungen sind scharf.

Gilt in einem Punkt P einer kompakten RF X vom Geschlecht $g=8$ oder $g \geq 11$ $\text{gew}(P) = (g^2-5g+10)/2$, so ist X elliptisch-hyperelliptisch,

d.h. es gibt eine zweiblättrige Überlagerung $X \rightarrow T$ über einem Torus T, also einer RF T vom Geschlecht 1.

Ein Schritt zur Lösung des Problems, die RF mit Weierstraßpunkten mit fester Lückenfolge zu bestimmen, wird durch folgenden Satz geleistet:

Satz: [Rauch] Die kompakten RF vom Geschlecht g, die einen Weierstraßpunkt P besitzen, dessen Polstellenhalbgruppe $(= \mathbb{N} \setminus \{v_1(P), \dots, v_g(P)\})$ mit einer festen Zahl $n \leq g$ beginnt, bilden, wenn $n+1$ eine Lücke ist, eine komplex analytische (eventuell unzusammenhängende) Untermannigfaltigkeit der Dimension $2g+n-3$ des Modul- (Torelli-, Teichmüller-) -raumes (der Dimension $3g-3$).

Ist $n+1$ keine Lücke, so bilden sie eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $2g+n-4$ des Modul- (Torelli-, Teichmüller-) -raumes.

Folgerung: Insbesondere ist für $n=g$ die Menge der RF, die einen normalen Weierstraßpunkt besitzen (d.h. Lückenfolge $\{1,2,\dots,g-1,g+1\}$), eine Untermannigfaltigkeit des Modul- (Torelli-, Teichmüller-) -raumes mit der gleichen Dimension ($=3g-3$).

Die Menge der RF, die einen Weierstraßpunkt mit einer Lückenfolge $\{1,2,\dots,g-1,k\}$ mit $g+2 \leq k \leq 2g-1$ besitzen, bildet eine Untermannigfaltigkeit des Modul- (Torelli-, Teichmüller-) -raumes mit der Dimension $3g-4$.

Die hyperelliptischen RF bilden ($n=2$) eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $2g-1$ im Modul- (Torelli-, Teichmüller-) -raum.

Bemerkung: Natürlich sind obige "Mengen von RF" jeweils modulo der den Räumen entsprechenden Äquivalenz zu betrachten.

Für den zu untersuchenden Fall $g=3$ ergeben sich als mögliche Weierstraßlückenfolgen:

- $\{1,2,3\}$ im allgemeinen, kein Weierstraßpunkt, $\text{gew}(P) = 0$
- $\{1,2,4\}$ für normale Weierstraßpunkte, $\text{gew}(P) = 1$
- $\{1,2,5\}$ für "doppelte" Weierstraßpunkte, $\text{gew}(P) = 2$
- $\{1,3,5\}$ für hyperelliptische Weierstraßpunkte, $\text{gew}(P) = 3$

Genau dann ist X hyperelliptisch, wenn es 8 Weierstraßpunkte vom Gewicht 3 gibt.

Für nichthyperelliptische Flächen ist das Gewicht eines Weierstraßpunktes 1 oder 2, die Gesamtzahl 24.

Bezeichnet n_i die Zahl der Weierstraßpunkte mit Gewicht i , so gilt

$$n_1 + 2n_2 = 24 \qquad n_2 \leq 12 \qquad 12 \leq n_1 + n_2 \leq 24$$

[Kuribayashi und Komiya] zeigten, daß für $n_1 + n_2 = 12$ ($n_1 = 0, n_2 = 12$) genau zwei nichtisomorphe RF existieren.

Wenden wir die Folgerung aus dem Satz von Rauch an:

Die RF vom Geschlecht 3, die einen Weierstraßpunkt mit Lückenfolge $\{1,2,4\}$ besitzen, bilden eine Untermannigfaltigkeit des Modul- (Torelli-, Teichmüller-) -raumes mit der Dimension 6.

Diejenigen mit einem Weierstraßpunkt mit Lückenfolge $\{1,2,5\}$ bilden eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 5.

Die hyperelliptischen RF vom Geschlecht 3 bilden eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 5 im Modul- (Torelli-, Teichmüller-) -raum.

1.2 Die Hauptkurve einer Riemann'schen Fläche

Zur Untersuchung unseres Problems werden wir die RF X als algebraische Kurve im projektiven Raum konkretisieren. Wir beschreiben zunächst diese Konkretisierung und übersetzen die relevanten Begriffe aus der analytischen Theorie der RF in die algebraische Theorie der projektiven Kurven.

Sei X eine nichthyperelliptische Fläche mit Geschlecht $g \geq 3$.

Sei $\{w_1, \dots, w_g\}$ eine Basis des Raumes $\Omega(X)$ der holomorphen Differentialformen von X .

Seien P ein Punkt von X , w, w' zwei holomorphe Differentialformen, die in P keine Nullstelle haben.

Dann gibt es eindeutige meromorphe Funktionen

f_i, f'_i auf X , $1 \leq i \leq g$, sodaß $w_i = f_i w = f'_i w'$.

Da $w' = (f_1/f'_1) w$, hängt $h := f_1/f'_1$ nicht mehr von i

ab, ist in P holomorph und nicht 0.

Daher ist der Punkt

$$\begin{aligned} (f_1(P) : \dots : f_g(P)) &= (h(P) \cdot f'_1(P) : \dots : h(P) \cdot f'_g(P)) = \\ &= (f'_1(P) : \dots : f'_g(P)) \in \mathbb{P}^{g-1} \end{aligned}$$

unabhängig von der Wahl der Differentialform w .

Wir definieren daher $k : X \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$

$$\begin{aligned} \text{durch} \quad P &\mapsto (f_1(P) : \dots : f_g(P)) = \\ &= ((\frac{w_1}{w})(P) : \dots : (\frac{w_g}{w})(P)), \end{aligned}$$

wobei w in P keine Nullstelle haben soll, $w \in \Omega(X)$ sonst aber beliebig. Durch obige Gleichung werden auch die Funktionen $\frac{w_i}{w}$ erklärt.

Dann gibt es zu jedem P und w wie oben eine Umgebung U von P , in der w keine Nullstelle hat. Also ist

für alle $P' \in U$

$$k(P') = ((\frac{w_1}{w})(P') : \dots : (\frac{w_g}{w})(P')).$$

In U sind die Funktionen $\frac{w_i}{w}$, $1 \leq i \leq g$, holomorph:

Lemma: Die Abbildung k ist daher holomorph, wenn man P^{g-1} mit der natürlichen komplexen Struktur versieht.

Lemma: Die Abbildung k ist injektiv.

Beweis: Seien zwei Punkte $P \neq P' \in X'$ gegeben.

Es gibt eine Differentialform w , die weder in P noch in P' eine Nullstelle hat.

Sei nun $k(P) = k(P')$ angenommen. Dann gilt

$$((\frac{w_1}{w})(P) : \dots : (\frac{w_g}{w})(P)) = ((\frac{w_1}{w})(P') : \dots : (\frac{w_g}{w})(P')),$$

also gibt es ein $r \in \mathbb{C}$, sodaß für alle $i \in \{1, \dots, g\}$

$$(\frac{w_i}{w})(P) = r \cdot (\frac{w_i}{w})(P').$$

Es gibt $m_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq g$, mit $w = \sum_{i=1}^g m_i w_i = (\sum_{i=1}^g m_i \frac{w_i}{w}) \cdot w$.

also gilt:

$$\begin{aligned} r &= r \cdot (\sum_{i=1}^g m_i \frac{w_i}{w})(P') = \sum_{i=1}^g m_i r (\frac{w_i}{w})(P') = \sum_{i=1}^g m_i (\frac{w_i}{w})(P) = \\ &= (\sum_{i=1}^g m_i \frac{w_i}{w})(P) = 1. \end{aligned}$$

Dann ist aber

$$\begin{aligned} \Omega_{(-P)} &:= \{w' \in \Omega(X) \mid \text{ord}_P w' \geq 1\} = \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^g l_i (w_i - (\frac{w_i}{w})(P) \cdot w) \mid l_i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq g \right\} = \\ &= \{w' \in \Omega(X) \mid \text{ord}_P w' \geq 1, \text{ord}_{P, w'} \geq 1\} =: \Omega_{(-P-P')} \end{aligned}$$

Weiterhin gilt wegen $g \neq 0$

$$O_{(P)} := \{f \in M(X) \mid \text{ord}_P f \geq -1, \text{ für alle } Q \neq P \text{ ord}_Q f \geq 0\} \cong \mathbb{C}.$$

Nach dem Satz von Riemann - Roch folgt

$$\begin{aligned} 1 &= \dim O_{(P)} = \dim \Omega_{(-P)} + 1 - g + 1 = \\ &= \dim \Omega_{(-P-P')} + 1 - g + 2 - 1 = \\ &= \dim O_{(P+P')} - 1. \end{aligned}$$

Es gibt also eine nicht-konstante meromorphe Funktion f_0 in $O_{(P+P')} = \{f \in M(X) \mid \text{ord}_P f \geq -1, \text{ord}_{P'} f \geq -1, \text{für alle } Q \neq P, P' \text{ ord}_Q f \geq 0\}$.

f_0 ist nicht konstant, hat daher mindestens einen, höchstens aber zwei einfache Pole. Also ist f_0 eine ein- oder zweiblättrige Überlagerung von X über $\mathbb{P}^1$, d.h. $g=0$ oder X ist hyperelliptisch. Beide Fälle waren ausgeschlossen und es muß sein

$$k(P) \neq k(P').$$

Lemma: k ist nicht singulär, und damit ist die

$$\text{Hauptkurve } C := k(X) \subset \mathbb{P}^{g-1}$$

eine eindimensionale analytische Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{P}^{g-1}$, die in keinem echten linearen Teilraum enthalten ist. Sie ist eindeutig bis auf projektive Transformationen des $\mathbb{P}^{g-1}$.

Beweis: Da X nicht hyperelliptisch ist, existiert zu jedem $P \in X$ eine holomorphe Differentialform w_P mit $\text{ord}_P w_P = 1$. Daher hat die Funktion $\frac{w_P}{w}$ in P eine einfache Nullstelle, wenn $w \in \Omega(X)$ in P keine Nullstelle hat. Wieder läßt sich w_P darstellen als

$$w_P = \sum_{i=1}^g l_i w_i, \text{ sodaß } \sum_{i=1}^g l_i \frac{w_i}{w} \text{ in } P \text{ eine einfache Null-}$$

stelle hat. Eine der Komponenten $\frac{w_i}{w}$ von k muß dann eine nicht-verschwindende Ableitung haben und k ist nicht singulär. Das Bild von X unter der nicht-singulären injektiven holomorphen Abbildung k ist daher eine eindimensionale analytische Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{P}^{g-1}$.

Sei nun

$$k(X) \subset H = \left\{ (x_1 : \dots : x_g) \in \mathbb{P}^{g-1} \mid \sum_{i=1}^g l_i x_i = 0 \right\}.$$

Dann ist für alle $P \in X$ $\sum_{i=1}^g l_i \left(\frac{w_i}{w} \right)(P) = 0$, also gilt

$\sum_{i=1}^g l_i w_i = 0$. Da $\{w_1, \dots, w_g\}$ Basis von $\Omega(X)$ ist, müssen

alle l_i verschwinden und die Hauptkurve ist in keiner Hyperebene enthalten.

Bei der Definition von C war nur die Basis $\{w_1, \dots, w_g\}$ von $\Omega(X)$ nicht eindeutig.

Sei $\{w'_i \mid 1 \leq i \leq g, w'_i = \sum_{j=1}^g l_{ij} w_j\}$ eine weitere Basis

$(l_{ij}) \in GL_g(\mathbb{C})$. Dann ist die mittels der gestrichenen Basis definierte Hauptkurve C' das Bild von C unter der zur nicht-singulären Matrix (l_{ij}) gehörenden projektiven Transformation

$$(x_1 : \dots : x_g) \mapsto \left(\sum_{j=1}^g l_{1j} x_j : \dots : \sum_{j=1}^g l_{gj} x_j \right).$$

Für jede solche Transformation gibt es umgekehrt eine Basis von $\Omega(X)$, sodaß das Bild von C unter dieser Transformation die vermittels dieser Basis konstruierte Hauptkurve ist.

Weitergehend gilt folgender

Satz: Die Hauptkurve einer RF ist eine nicht-singuläre algebraische Kurve im $\mathbb{P}^{g-1}$.

(Siehe zB bei [Gunning])

Lemma: C hat den Grad $2g-2$.

Beweis: Der Grad einer algebraischen Kurve ist die Anzahl der Schnittpunkte (mit Vielfachheit gezählt) mit einer Hyperebene.

$$\# C \cap H = \# \left\{ (x_1 : \dots : x_g) \in C \mid \sum_{i=1}^g l_i x_i = 0 \right\} =$$

$$= \# \left\{ P \in X \mid \sum_{i=1}^g l_i \frac{w_i}{w} = 0 \right\} = \# \left\{ P \in X \mid \sum_{i=1}^g l_i w_i = 0 \right\} = 2g-2,$$

da jede holomorphe Differentialform (mit Vielfachheit) $2g-2$ Nullstellen besitzt.

Lemma: Identifizieren wir X vermittels k mit C , so hat jede homogene Gleichung vom Grad m in den

Koordinaten $x_1, \dots, x_g$ auf C dieselbe Lösungsmenge wie eine Gleichung m -ten Grades in den Differentialformen $w_1, \dots, w_g$ und umgekehrt.

Beweis: Sei nämlich $\sum_{i=1}^g x_i^{m_i}$ mit $\sum_{i=1}^g m_i = m$ ein Monom aus so einer Gleichung, so können wir es schreiben

$$\text{als } \sum_{i=1}^g x_i^{m_i} = \sum_{i=1}^g \left(\frac{w_i}{w}\right)^{m_i} = w^{-m} \sum_{i=1}^g w_i^{m_i}. \text{ Dies gilt für}$$

beliebiges $w \in \Omega(X)$ im Gebiet $\{P \in X \mid w(P) \neq 0\}$. Die Multiplikation mit w^m ändert daher nichts an der Lösung der Gleichung.

Bemerkung: In diesem Sinne werden wir insbesondere gleichberechtigt von Nullstellen von Differentialformen und Hyperebenenschnitten bzw von Nullstellen von quadratischen Differentialformen und Schnitten mit Quadriken (Kegelschnitten) reden (Denn für jede quadratische Differentialform $w^{(2)}$ auf X nichthyperelliptisch gibt es $l_{ij} \in \mathbb{C}$ mit

$$w^{(2)} = \sum_{i,j=1}^g l_{ij} w_i w_j \quad (\text{M.Noether}))$$

Als Anwendung folgt sofort das

Lemma: Weierstraßpunkte von C als RF sind genau die Wendepunkte von C als Kurve.

Beweis: Wendepunkte sind genau die Punkte P , für die eine Hyperebene existiert, die die Kurve in P mindestens g -fach schneidet.

Weierstraßpunkte sind genau jene Punkte P , für die eine Differentialform existiert, die in P eine g -fache Nullstelle besitzt.

Ordnen wir jeder Differentialform $w \in \Omega(X)$ die eindeutig bestimmte Hyperebene durch ihre Nullstellen zu und bezeichnen sie mit $H(w)$, so gilt folgendes

Lemma: m Differentialformen $\{w'_1, \dots, w'_m\} \subset \Omega(X)$ sind genau dann linear abhängig (unabhängig), wenn der Durchschnitt der m Hyperebenen $H(w'_i)$ mindestens $g-m$ dimensional (genau von der Dimension $g-m-1$) ist. Beweis: Seien $w'_1, \dots, w'_m$ linear abhängig (unabhängig).

$V := \{(l_1, \dots, l_g) \in \mathbb{C}^g \mid \sum_{j=1}^g l_j w_j \in \langle w'_1, \dots, w'_m \rangle\}$ hat also

Dimension $< m$ ($= m$). Für $w'_i = \sum_{j=1}^g l_{ij} w_j$ sind die

Hyperebenen $H(w'_i)$ dann durch $\{(x_1 : \dots : x_g) \mid \sum_{j=1}^g l_{ij} x_j = 0\}$ gegeben und

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^m H(w'_i) &= \left\{ (x_1 : \dots : x_g) \mid \text{für } 1 \leq i \leq m \quad \sum_{j=1}^g l_{ij} x_j = 0 \right\} = \\ &= \left\{ (x_1 : \dots : x_g) \mid \sum_{j=1}^g l_j x_j = 0 \text{ für alle } (l_1, \dots, l_g) \in V \right\} = \\ &= V^\perp, \text{ der im Dualraum } \mathbb{C}^{g*} \text{ zu } V \text{ bezüglich des eukli-} \\ &\text{dischen Skalarprodukts orthogonale Raum.} \end{aligned}$$

$\dim V^\perp = g - \dim V$, daher ist die Dimension des projektiven Unterraumes $\bigcap_{i=1}^m H(w'_i)$ gleich $g - \dim V - 1$.

Korollar: g Differentialformen sind genau dann linear abhängig, wenn die ihnen zugeordneten Hyperebenen einen Punkt gemeinsam haben.

Es gibt eine Bijektion Φ zwischen der Menge der $g-1$ dimensionalen Unterräume von $\Omega(X)$ und $\mathbb{P}^{g-1}$ als Punktmenge, die durch $\Phi(P) = \{w \in \Omega(X) \mid P \in H(w)\}$ gegeben wird.

Beweis: $w'_1, \dots, w'_g$ sind genau dann linear abhängig, wenn der Durchschnitt der $H(w'_i)$, $1 \leq i \leq g$, mindestens von der Dimension 0, also nicht leer ist.

Sei $U \subseteq \Omega(X)$ ein Unterraum der Dimension $g-1$ mit Basis $\{w'_1, \dots, w'_{g-1}\}$. Dann ist der Schnitt der $H(w'_i)$, $1 \leq i \leq g-1$, genau ein Punkt P .

Es gilt sogar $U = \tilde{\Phi}(P)$, denn wenn $P \in H(w)$, dann ist $\{w, w'_1, \dots, w'_{g-1}\}$ linear abhängig, also $w \in U$.

$\tilde{\Phi}(P)$ ist also $g-1$ -dimensional. Gleichzeitig haben wir gezeigt, daß $U \xrightarrow{\sim} P$ die Umkehrabbildung von $\tilde{\Phi}$ ist.

Wir wollen nun noch bestimmen, wie Iso- und Automorphismen von RF aussehen, wenn wir Hauptkurven untersuchen.

Lemma: Sei A ein Isomorphismus von RF, $A: C \rightarrow C'$, C und C' Hauptkurven.

Dann gibt es eine nichtsinguläre projektive Transformation T , sodaß $T|_C = A$. Klar auch $T(C) \subseteq C'$.

Ist T eine nichtsinguläre projektive Transformation mit $T(C) \subseteq C'$, so ist $T|_C$ ein Isomorphismus von C und C' .

Beweis: Sei $\{w_1, \dots, w_g\}$ Basis von $\Omega(C)$, die zur Hauptkurve C gehört.

Sei $\{w'_1, \dots, w'_g\}$ Basis von $\Omega(C')$, die zur Hauptkurve C' gehört.

Sei $A^*: \Omega(C') \rightarrow \Omega(C)$ die von A induzierte lineare Abbildung, d.h. für $w' = f'dz'$ ist

$$A^*(w') = (f' \circ A) d(z' \circ A).$$

Sei weiter $A^*(w'_i) = \sum_{j=1}^g l_{ij} w_j$, $1 \leq i \leq g$, dann ist (l_{ij})

eine nichtsinguläre Matrix und ebenso die zugehörige projektive Transformation T nichtsingulär.

Für $P \in C$, $w \in \Omega(C)$ mit $w(P) \neq 0$, $w = A^*(w')$, gilt

$$\begin{aligned} T(P) &= T\left(\left(\frac{w_1}{w}\right)(P) : \dots : \left(\frac{w_g}{w}\right)(P)\right) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^g l_{1j} \left(\frac{w_j}{w}\right)(P) : \dots : \sum_{j=1}^g l_{gj} \left(\frac{w_j}{w}\right)(P)\right) = \\ &= \left(\frac{A^*(w'_1)}{w}(P) : \dots : \frac{A^*(w'_g)}{w}(P)\right) = \\ &= \left(\left(\frac{w'_1}{w'}\right)(A(P)) : \dots : \left(\frac{w'_g}{w'}\right)(A(P))\right) = A(P). \end{aligned}$$

Ist T nichtsinguläre projektive Transformation, so ist T injektiv und biholomorph. Das Bild $T(C)$ der kompakten RF C ist zugleich offen und abgeschlossen in C' . Deshalb ist T ein Isomorphismus.

Lemma: Sei A ein antianalytischer Automorphismus der RF $C \subseteq \mathbb{P}^{g-1}$ und sei $\overline{}$ die Konjugation aller Koordinaten des $\mathbb{P}^{g-1}$. Dann ist für alle $P \in C$ $A(P) = T(\overline{P})$, wobei T eine nichtsinguläre projektive Transformation ist.

Beweis: Sei $\overline{C}$ das Bild von C unter $\overline{}$. $A' := A \circ \overline{}$ ist dann ein Isomorphismus von $\overline{C}$ auf C , denn $\overline{}$ ist eine antianalytische Transformation (das Konjugierte des Bildes der lokalen Koordinate

$\sum_{i=1}^g l_i x_i$ unter $\overline{}$ ist ja $\sum_{i=1}^g \overline{l_i} x_i$, also analytisch).

Dann gibt es ein T wie gefordert mit $T|_{\overline{C}} = A'$.

Beschränken wir uns jetzt auf $g = 3$.

Die Hauptkurve ist dann eine nichtsinguläre Kurve Q vom Grad 4 im $\mathbb{P}^2$, also eine nichtsinguläre ebene Quartik.

Versehen wir $\mathbb{P}^2$ mit den Koordinaten $(x:y:z)$, so ist $\mathbb{C}(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$ der Körper der meromorphen Funktionen auf Q .

Die Weierstraßpunkte sind die Wendepunkte der Quartik. Zu Weierstraßpunkten vom Gewicht 2 ("doppelte Weierstraßpunkte") gibt es eine Differentialform, die dort eine vierfache Nullstelle besitzt. Die entsprechende Gerade (= Hyperebene) hat daher einen vierfachen Schnittpunkt mit der Quartik, ist also Flachtangente. Umgekehrt gehört zu jeder Flachtangente eine (bis auf komplexe Vielfache eindeutige) Differentialform mit vierfacher Nullstelle.

Weierstraßpunkte der Ordnung 2 sind also genau die Flachpunkte der Quartik, einfache Weierstraßpunkte sind die Wendepunkte, die nicht Flachpunkte sind.

Die Zahl der verschiedenen Weierstraßpunkte ist also $24 - \text{Zahl der Flachpunkte}$.

Wir werden daher diejenigen Quartiken bestimmen, die mindestens $0, 1, \dots, 12$ Flachpunkte besitzen.

1.3. Nichtsinguläre Quartiken

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Bedingungen, unter denen eine Quartik nichtsingulär ist.

Eine Kurve C im $\mathbb{P}^2$ wird durch ein homogenes Polynom $f \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ definiert:

$$C = \{(x:y:z) \in \mathbb{P}^2 \mid f(x,y,z) = 0\}, \text{ kurz } C = \{f = 0\}.$$

Sie ist genau dann singulär, wenn es einen singulären Punkt auf ihr gibt, also einen Punkt, wo alle ersten Ableitungen von f verschwinden.

Hilfssatz: Für ein homogenes Polynom $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_l]$ vom Gesamtgrad n gilt

$$nf = \sum_{i=1}^l X_i \cdot f_{X_i}.$$

Beweis: Sei $A := aX_1^{r_1} \dots X_l^{r_l}$ ein Monom von f .

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } \sum_{i=1}^l X_i \cdot A_{X_i} &= \sum_{i=1}^l X_i \cdot a X_1^{r_1} \dots X_i^{r_i-1} \dots X_l^{r_l} \cdot r_i = \\ &= \sum_{i=1}^l r_i \cdot a X_1^{r_1} \dots X_l^{r_l} = nA. \end{aligned}$$

Wegen der Homogenität

folgt die Behauptung.

Lemma: Eine ebene Kurve $\{f = 0\}$ ist genau dann singulär, wenn f_X, f_Y, f_Z im $\mathbb{P}^2$ eine gemeinsame Nullstelle besitzen.

Beweis: Eine solche gemeinsame Nullstelle ist wegen des Hilfssatzes Punkt der Kurve und damit singulärer Punkt.

Wir betrachten Hauptkurven von RF mit Geschlecht 3, also nichtsinguläre Quartiken.

Insbesondere werden wir uns später auf solche Quartiken beschränken können, die durch Polynome der folgenden Form definiert werden:

$$(X) \left\{ \begin{aligned} f &= a_{004}z^4 + a_{112}xyz^2 + \\ &+ a_{211}x^2yz + a_{121}xy^2z + \\ &+ a_{310}x^3y + a_{220}x^2y^2 + a_{130}xy^3 \end{aligned} \right.$$

Dadurch ergibt sich

$$f_X = Y \left[a_{112}z^2 + 2a_{211}xz + a_{121}yz + \right. \\ \left. + 3a_{310}x^2 + 2a_{220}xy + a_{130}y^2 \right]$$

$$f_Y = X \left[a_{112}z^2 + a_{211}xz + 2a_{121}yz + \right. \\ \left. + a_{310}x^2 + 2a_{220}xy + 3a_{130}y^2 \right]$$

$$f_Z = 4a_{004}z^3 + XY \left[2a_{112}z + a_{211}x + a_{121}y \right]$$

Soll nun $(x:y:z)$ singulärer Punkt sein, so muß für $x=0$ oder $y=0$ insbesondere auch

$$f_Z(x:y:z) = 0 = 4a_{004}z^3 \text{ gelten.}$$

Für $a_{004} = 0$ ist $(0:0:1)$ singulärer Punkt.

Ist $a_{004} \neq 0$, dann können nur die Punkte $(0:1:0)$ bzw $(1:0:0)$ singulär sein. Sie sind genau dann singulär, wenn $0 = f_X(0:1:0) = a_{130}$

$$\text{bzw } 0 = f_Y(1:0:0) = a_{310} \text{ gilt.}$$

Lemma: Insbesondere gilt für nichtsinguläre Quartiken von der obigen Form (X): $a_{004}a_{310}a_{130} \neq 0$.

Gilt nun $a_{004}a_{310}a_{130} \neq 0$, so ist kein Punkt mit $x=0$ oder $y=0$ singulär.

Gibt es dann einen singulären Punkt $(x:y:z)$, so ist $x \neq 0 \neq y$ und es muß gelten:

$$a_{112}z^2 + 2a_{211}xz + a_{121}yz + 3a_{310}x^2 + 2a_{220}xy + a_{130}y^2 = 0$$

$$a_{112}z^2 + a_{211}xz + 2a_{121}yz + a_{310}x^2 + 2a_{220}xy + 3a_{130}y^2 = 0$$

Durch Subtraktion bzw Addition erhalten wir hieraus:

$$(XX) \left\{ \begin{array}{l} (a_{211}x - a_{121}y)z + (2a_{310}x^2 - 2a_{130}y^2) = 0 \\ 2a_{112}z^2 + (3a_{211}x + 3a_{121}y)z + (4a_{310}x^2 + 4a_{220}xy + 4a_{130}y^2) = 0 \\ \text{sowie als dritte Gleichung} \\ 4a_{004}z^3 + xy(2a_{112}z + a_{211}x + a_{121}y) = 0. \end{array} \right.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt dann

$$\begin{aligned} 0 &= 2a_{112}(a_{211}x - a_{121}y)^2z^2 + \\ &+ (3a_{211}x + 3a_{121}y)(a_{211}x - a_{121}y)^2z + \\ &+ (4a_{310}x^2 + 4a_{220}xy + 4a_{130}y^2)(a_{211}x - a_{121}y)^2 = \\ &= 2a_{112}(2a_{310}x^2 - 2a_{130}y^2)^2 + \\ &+ (3a_{211}x + 3a_{121}y)(a_{211}x - a_{121}y)(-2a_{310}x^2 + 2a_{130}y^2) + \\ &+ (4a_{310}x^2 + 4a_{220}xy + 4a_{130}y^2)(a_{211}x - a_{121}y)^2 =: f_1(x:y) \end{aligned}$$

und genauso aus der ersten und dritten Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= 4a_{004}(-2a_{310}x^2 + 2a_{130}y^2)^3 + \\ &+ 2a_{112}xy(a_{211}x - a_{121}y)^2(-2a_{310}x^2 + 2a_{130}y^2) + \\ &+ xy(a_{211}x + a_{121}y)(a_{211}x - a_{121}y)^3 =: f_2(x:y) \\ (\text{Ist } f_2(x:y) &= 0, \text{ so ist } x \neq 0 \neq y) \end{aligned}$$

Die Resultante der in (x,y) homogenen Polynome f_1 und f_2 muß daher verschwinden:

$$R(f_1, f_2) = 0.$$

Ist also $R(f_1, f_2) \neq 0$, so existieren keine singulären Punkte.

Ist $R(f_1, f_2) = 0$, dann gibt es $(x:y)$ mit $f_1(x:y) = f_2(x:y) = 0$, insbesondere $x \neq 0 \neq y$.

Falls nun $a_{211}x - a_{121}y \neq 0$, so ist offensichtlich

$$(x:y: \frac{-2a_{310}x^2 + 2a_{130}y^2}{a_{211}x - a_{121}y}) \text{ gemeinsame Nullstelle von}$$

(XX) und damit singulärer Punkt.

Ist aber $a_{211}x - a_{121}y = 0$, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= a_{211}^2 \cdot f_2(x:y) = -8a_{004}(a_{310}a_{211}^2x^2 - a_{130}a_{211}^2y^2) = \\ &= -8a_{004}y^2(a_{310}a_{121}^2 - a_{130}a_{211}^2) \end{aligned}$$

und wegen $a_{004} \neq 0$, $y \neq 0$:

$$0 = a_{310}a_{121}^2 - a_{130}a_{211}^2.$$

Wir fassen zusammen:

Lemma: Eine Quartik der Form (X), für die

$$a_{310}a_{121}^2 - a_{130}a_{211}^2 \neq 0$$

gilt, ist genau dann singulär, wenn

$$a_{004}a_{310}a_{130} \cdot R(f_1, f_2) = 0.$$

Ist $a_{310}a_{121}^2 - a_{130}a_{211}^2 = 0$, $a_{004}a_{310}a_{130} \neq 0$,

und gibt es einen singulären Punkt $(x:y:z)$ mit $x \neq 0$, $y \neq 0$, $a_{211}x - a_{121}y \neq 0$,

so ist insbesondere $a_{121} \neq 0 \neq a_{211}$ und aus der ersten Gleichung von (XX) wird:

$$\begin{aligned} 0 &= a_{121}^2(a_{211}x - a_{121}y)z + (2a_{130}a_{211}^2x^2 - 2a_{130}a_{121}^2y^2) = \\ &= (a_{211}x - a_{121}y) \left[a_{121}^2z + 2a_{130}(a_{211}x + a_{121}y) \right]. \end{aligned}$$

Daher ist $a_{121}^2z + 2a_{130}(a_{211}x + a_{121}y) = 0$.

Wie oben gilt weiter

$$\begin{aligned} 0 &= 8a_{112}a_{130}^2(a_{211}x + a_{121}y)^2 - \\ &\quad - 6a_{121}^2a_{130}(a_{211}x + a_{121}y)^2 + \\ &\quad + 4a_{121}^4(a_{310}x^2 + a_{220}xy + a_{130}y^2) =: f_1'(x:y) \text{ sowie} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -32a_{004}a_{130}^3(a_{211}x + a_{121}y)^3 - \\ &\quad - 4a_{112}a_{121}^4a_{130}xy(a_{211}x + a_{121}y) + \end{aligned}$$

$$+ a_{121}^6(a_{211}x + a_{121}y) =: f'_2(x:y).$$

Daher verschwindet die Resultante $R(f'_1, f'_2)$.

Ist umgekehrt für $a_{310}a_{121}^2 - a_{130}a_{211}^2 = 0 \neq a_{121}$

$R(f'_1, f'_2) = 0$, so gibt es $(x:y)$ mit

$$f'_1(x:y) = f'_2(x:y) = 0.$$

Dann ist $(x:y: \frac{2a_{130}(a_{211}x + a_{121}y)}{a_{121}^2})$ gemeinsame Null-

stelle von (XX) und damit singulärer Punkt.

Ist $a_{310}a_{121}^2 - a_{130}a_{211}^2 = 0$, und gibt es einen singulären Punkt $(x:y:z)$ mit $x \neq 0$, $y \neq 0$, $a_{211}x - a_{121}y = 0$, aber $a_{121} \neq 0$, so folgt wieder wie oben

$$\begin{aligned} 0 &= 2a_{112}a_{121}^2z^2 + 6a_{121}^2a_{211}xz + \\ &+ (4a_{310}a_{121}^2x^2 + 4a_{220}a_{121}a_{211}x^2 + 4a_{130}a_{211}^2x^2) = \\ &= a_{121} [2a_{112}a_{121}z^2 + 6a_{121}a_{211}xz + \\ &+ (8a_{310}a_{121} + 4a_{220}a_{211})x^2] =: a_{121}f''_1(x:z) \quad \text{sowie} \end{aligned}$$

$$0 = 4a_{004}a_{121}z^3 + 2a_{112}a_{211}x^2z + 2a_{211}^2x^3 =: f''_2(x:z).$$

Daher muß die Resultante von f''_1 und f''_2 verschwinden.

Umgekehrt gibt es für $a_{310}a_{121}^2 - a_{130}a_{211}^2 = 0 \neq a_{121}$,

$R(f''_1, f''_2) = 0$ ein $(x:z)$ mit

$$f''_1(x:z) = f''_2(x:z) = 0.$$

Dann ist $(x: \frac{a_{211}}{a_{121}}x:z)$ singulärer Punkt.

Lemma: Eine Quartik der Form (X), für die

$$a_{310}a_{121}^2 - a_{130}a_{211}^2 = 0 \neq a_{121}$$

gilt, ist genau dann singulär, wenn

$$a_{004}a_{310}a_{130} \cdot R(f'_1, f'_2) \cdot R(f''_1, f''_2) = 0.$$

Ist schließlich $a_{121} = 0 = a_{211}$, $a_{310} \neq 0 \neq a_{004}$ und gibt es einen singulären Punkt $(x:y:z)$ mit $x \neq 0 \neq y$, so gilt

$$0 = a_{310}x^2 - a_{130}y^2$$

$$0 = 2a_{112}z^2 + (4a_{310}x^2 + 4a_{220}xy + 4a_{130}y^2)$$

$$0 = (2a_{004}z^2 + a_{112}xy) \cdot z$$

also entweder $z = 0$:

$$\text{dann ist } 0 = 4x(2a_{310}x + a_{220}y)$$

$$0 = 4(a_{310}x^2 + a_{220}xy + a_{130}y^2),$$

wegen $x \neq 0$ also

$$a_{220}^2 - 4a_{310}a_{130} = 0$$

und umgekehrt ist dann für die einzige Lösung $(x:y)$

von $a_{310}x^2 + a_{220}xy + a_{130}y^2 = 0$ der Punkt $(x:y:0)$ singulär.

Oder es folgt für $z \neq 0$ sofort $a_{112} \neq 0$ und

$$0 = 4a_{004}(a_{310}x^2 - a_{130}y^2) +$$

$$+ a_{004}(2a_{112}z^2 + 4a_{310}x^2 + 4a_{220}xy + 4a_{130}y^2) +$$

$$- a_{112}(2a_{004}z^2 + a_{112}xy) =$$

$$= x \left[8a_{004}a_{310}x + (4a_{004}a_{220} - a_{112}^2)y \right], \text{ wegen } x \neq 0 \text{ also}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= 64a_{004}^2 a_{310} (a_{310} x^2 - a_{130} y^2) = \\
 &= (4a_{004}^2 a_{220} - a_{112}^2) y^2 - 64a_{004}^2 a_{310} a_{130} y^2, \text{ und wegen } y \neq 0 \\
 &16a_{004}^2 (a_{220}^2 - 4a_{310} a_{130}) + a_{112}^2 (a_{112}^2 - 8a_{004}^2 a_{220}) = 0.
 \end{aligned}$$

Gilt diese Bedingung, so ist mit einem z , für das

$$16a_{004}^2 a_{310} z^2 + a_{112}^2 (a_{112}^2 - 4a_{004}^2 a_{220}) y^2 = 0 \text{ gilt,}$$

der Punkt $(\frac{a_{112}^2 - 4a_{004}^2 a_{220}}{8a_{004}^2 a_{310}} y : y : z)$ singulär.

Lemma: Eine Quartik der Form (X), für die

$a_{310} a_{121}^2 - a_{130} a_{211}^2 = 0 = a_{121}$ gilt, ist genau dann singulär, wenn:

$$\begin{aligned}
 &a_{004}^2 a_{310} a_{130} (a_{220}^2 - 4a_{310} a_{130}) \cdot \\
 &\cdot [16a_{004}^2 (a_{220}^2 - 4a_{310} a_{130}) + a_{112}^2 (a_{112}^2 - 8a_{004}^2 a_{220})] = 0.
 \end{aligned}$$

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen:

Satz: Alle nichtsingulären Quartiken der Form (X) sind bestimmt durch die Bedingung

$a_{004}^2 a_{310} a_{130} \neq 0$ und eine der Bedingungen

$$a_{310} a_{121}^2 - a_{130} a_{211}^2 \neq 0 \text{ und } R(f_1, f_2) \neq 0 \quad \text{oder}$$

$$a_{310} a_{121}^2 - a_{130} a_{211}^2 = 0 \text{ und } a_{121} \neq 0 \text{ und}$$

$$R(f_1', f_2') \neq 0 \text{ und } R(f_1'', f_2'') \neq 0 \quad \text{oder}$$

$$a_{310} a_{121}^2 - a_{130} a_{211}^2 = 0 \text{ und } a_{121} = 0 \text{ und}$$

$$a_{220}^2 - 4a_{310} a_{130} \neq 0 \quad \text{und}$$

$$16a_{004}^2 (a_{220}^2 - 4a_{310} a_{130}) + a_{112}^2 (a_{112}^2 - 8a_{004}^2 a_{220}) \neq 0.$$

Bemerkung: Bei der praktischen Anwendung dieses Satzes wird zB $R(f_1, f_2) \neq 0$ dadurch gezeigt, daß man nachweist, daß f_1 und f_2 keine gemeinsame Nullstelle besitzen. Zum dirkten Nachweis wäre hier eine Determinante der Ordnung 10 auszurechnen.

1.4 Wendepunkte und Flachpunkte

Wir geben hier den Weg an, wie man bei einer gegebenen Quartik die Wende- und Flachpunkte und damit auch die Anzahl der Flachpunkte bestimmt.

Zunächst die übliche Kennzeichnung von Wendepunkten:

Wendepunkte einer Kurve $C = \{f = 0\}$ im $\mathbb{P}^2$ sind genau die Punkte $(x:y:z) \in C$, für die die Determinante

$$H := \begin{vmatrix} f_{XX} & f_{XY} & f_{XZ} \\ f_{YX} & f_{YY} & f_{YZ} \\ f_{ZX} & f_{ZY} & f_{ZZ} \end{vmatrix} \quad \text{verschwindet.}$$

Das sind also genau die Schnittpunkte von C und $\{H=0\}$, der "Hesse'schen von C ".

Ist C eine Quartik, so sind $f_{XX}, f_{XY}, \dots$ homogen vom Grad 2, die Hesse'sche also eine Kurve 6. Grades. Die beiden Kurven haben mit Vielfachheit genau $4 \cdot 6 = 24$ Schnittpunkte. Ein Punkt ist mindestens doppelter Schnittpunkt und damit Flachpunkt, wenn die Tangenten von Kurve und Hesse'scher übereinstimmen.

Wir verwenden jedoch zur Charakterisierung von Wende- (Flach-) punkten die Eigenschaft, die schon früher erwähnt wurde, daß nämlich die Tangente (im nichtsingulären Punkt) einen 3- (4-) fachen Schnittpunkt mit der Kurve hat.

Um nun die Wende- und Flachpunkte einer ebenen Kurve $\{f=0\}$ festzustellen, untersuchen wir alle Geraden G des $\mathbb{P}^2$ daraufhin, ob sie Wende- oder Flachtangente sind, d.h. ob $f|_G$, die auf die Gerade G beschränkte Form f , in einem Punkt eine drei- oder vierfache Nullstelle besitzt.

Wir können uns für das gegebene Problem auf nicht-singuläre Quartiken $\{f=0\}$ beschränken mit

$$(X) \left\{ \begin{aligned} f &= a_{004}Z^4 + a_{112}XYZ^2 + \\ &+ a_{211}X^2YZ + a_{121}XY^2Z + \\ &+ a_{310}X^3Y + a_{220}X^2Y^2 + a_{130}XY^3 \end{aligned} \right.$$

(Die Begründung hierfür wird im zweiten Teil geliefert.)

Sei zunächst $G = \{Y=0\}$.

$f|_G = a_{004}Z^4$, also hat $f|_G$ in $(1:0:0)$ eine vierfache Nullstelle.

Lemma: $P_1 = (1:0:0)$ ist daher Flachpunkt mit Flachtangente $\{Y=0\}$ an jede solche Quartik $\{f=0\}$.

Nun untersuchen wir $G = \{X=lY\}$ für ein $l \in \mathbb{C}$.

$$f|_G = a_{004}Z^4 + a_{112}lY^2Z^2 + (a_{211}l^2 + a_{121}l)Y^3Z + \\ + (a_{310}l^3 + a_{220}l^2 + a_{130}l)Y^4$$

hat genau dann eine dreifache Nullstelle, wenn

$$f|_G = a_{004}(Z - rY)^3(Z + 3rY) = \\ = a_{004}Z^4 - 6r^2a_{004}Y^2Z^2 + 8r^3a_{004}Y^3Z - 3r^4a_{004}Y^4 \text{ für}$$

ein $r \in \mathbb{C}$, also genau dann, wenn

$$0 = 8a_{112}l^3 + 27a_{004}(a_{211}l^2 + a_{121}l)^2 = \\ = l^2 \left[27a_{004}a_{211}^2l^2 + (54a_{004}a_{211}a_{121} + 8a_{112}^3)l + 27a_{004}a_{121}^2 \right]$$

$$\text{und } 0 = a_{112}l^2 + 12a_{004}(a_{310}l^3 + a_{220}l^2 + a_{130}l) = \\ = l \left[12a_{004}a_{310}l^2 + (12a_{004}a_{220} + a_{112}^2)l + 12a_{004}a_{130} \right].$$

Haben diese beiden Gleichungen eine gemeinsame Lösung l , so ist

$$(1:l:r) = \left(\frac{1}{r} : \frac{1}{r} : 1 \right)$$

ein Wendepunkt mit der Tangente $\{X=lY\}$ ($r \neq 0$).

$f|_G$ hat genau dann eine vierfache Nullstelle, wenn
 $r = -3r$, also $r = 0$.
 Dies trifft zu für $l = 0$.

Lemma: $P_2 = (0:1:0)$ ist Flachpunkt mit Tangente
 $\{X = 0\}$ für jede Quartik mit der Form (X) .

$$r = 0 \text{ gilt auch für } 0 = a_{112} = a_{211}l + a_{121} = \\ = a_{310}l^2 + a_{220}l + a_{130}.$$

So ein l existiert genau dann, wenn

$$a_{112} = 0 = a_{310}a_{121}^2 - a_{220}a_{211}a_{121} + a_{130}a_{211}^2.$$

Genau dann existieren sogar zwei verschiedene solche
 Lösungen l , wenn $a_{211} = a_{121} = a_{112} = 0$.

In jedem Fall ist ein Flachpunkt gegeben durch
 $x = ly, \quad z = 0$.

Lemma: Für jedes $l \in \mathbb{C}$ mit

$$a_{211}l + a_{121} = a_{310}l^2 + a_{220}l + a_{130} = 0$$

erhalten wir, falls $a_{112} = 0$, einen Flachpunkt $(1:1:0)$
 mit Tangente $\{X = lY\}$. ($l \neq 0$)

Genau dann, wenn $a_{211} = a_{121} = a_{112} = 0$, existieren
 2 verschiedene solche Flachpunkte.

Ist $a_{112} = a_{310}a_{121}^2 - a_{220}a_{211}a_{121} + a_{130}a_{211}^2 = 0$, dann
 gibt es einen solchen Flachpunkt, sonst keinen.

Alle anderen Geraden des $\mathbb{P}^2$ sind von der Form

$$G = \{Z = lX + mY\} \quad l, m \in \mathbb{C}.$$

Dann hat

$$\begin{aligned}
 f|_G = & a_{004} l^4 X^4 + a_{004} m^4 Y^4 + \\
 & + 4a_{004} l^3 m X^3 Y + 6a_{004} l^2 m^2 X^2 Y^2 + 4a_{004} l m^3 X Y^3 + \\
 & + a_{112} l^2 X^3 Y + 2a_{112} l m X^2 Y^2 + a_{112} m^2 X Y^3 + \\
 & + a_{211} l X^3 Y + a_{211} m X^2 Y^2 + \\
 & + a_{121} l X^2 Y^2 + a_{121} m X Y^3 + \\
 & + a_{310} X^3 Y + a_{220} X^2 Y^2 + a_{130} X Y^3
 \end{aligned}$$

genau dann eine dreifache Nullstelle, wenn

$$\begin{aligned}
 f|_G = & a_{004} (X + rY)^3 (l^4 X + r'Y) = \\
 = & a_{004} l^4 X^4 + a_{004} (3rl^4 + r') X^3 Y + a_{004} (3r^2 l^4 + 3rr') X^2 Y^2 + \\
 & + a_{004} (r^3 l^4 + 3r^2 r') X Y^3 + a_{004} r^3 r' Y^4
 \end{aligned}$$

(denn für $l = 0$ ist wegen $a_{310} \neq 0$ $Y = 0$ einfache Nullstelle von $f|_G$),

also genau dann, wenn:

$$\begin{aligned}
 a_{004} (3r l^4 + r') &= 4a_{004} l^3 m + a_{112} l^2 + a_{211} l + a_{310} \\
 a_{004} (3r^2 l^4 + 3rr') &= 6a_{004} l^2 m^2 + 2a_{112} l m + a_{211} m + a_{121} l + a_{220} \\
 a_{004} (r^3 l^4 + 3r^2 r') &= 4a_{004} l m^3 + a_{112} m^2 + a_{121} m + a_{130} \\
 a_{004} r^3 r' &= a_{004} m^4
 \end{aligned}$$

Für jede gemeinsame Lösung (r, r', l, m) gibt es einen

$$\text{Wendepunkt } (r:1:lr+m) = \left(\frac{r}{lr+m} : \frac{1}{lr+m} : 1 \right) \quad (lr+m \neq 0)$$

$$\text{bzw } (r:1:0) \text{ mit Tangente } \{Z = lX + mY\}.$$

Durch Subtraktion des $3r$ -, $3r^2$ - bzw r^3 -fachen der ersten von der zweiten, dritten bzw vierten Gleichung verschwindet r' . Die weiteren Rechnungen sind dann aber sehr umfangreich.

Für eine vierfache Nullstelle können wir die Bedingungen jedoch vereinfachen zu

$$f|_G = a_{004}(lX + rY)^4,$$

die vierte Gleichung lautet dann:

$$a_{004}r^4 = a_{004}m^4, \text{ also } r = em \text{ mit } e^4 = 1.$$

Es verbleiben drei einfachere Bedingungen:

$$\begin{cases} 4e a_{004} l^3 m = 4a_{004} l^3 m + a_{112} l^2 + a_{211} l + a_{310} \\ 6e^2 a_{004} l^2 m^2 = 6a_{004} l^2 m^2 + 2a_{112} l m + a_{211} m + a_{121} l + a_{220} \\ 4e^3 a_{004} l m^3 = 4a_{004} l m^3 + a_{112} m^2 + a_{121} m + a_{130} \end{cases}$$

(insbesondere wegen $a_{310} a_{130} \neq 0 : l \neq 0 \neq m$)

Für $e = 1$ bleibt:

$$\begin{cases} a_{112} l^2 + a_{211} l + a_{310} = 0 \\ a_{112} m^2 + a_{121} m + a_{130} = 0 \\ (2a_{112} l + a_{211})m + (a_{121} l + a_{220}) = 0, \text{ also} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &= a_{112} (a_{121} l + a_{220})^2 - \\ &\quad - a_{121} (a_{121} l + a_{220}) (2a_{112} l + a_{211}) + \\ &\quad + a_{130} (2a_{112} l + a_{211})^2 = \\ &= (a_{112} l^2 + a_{211} l + a_{310}) (4a_{112} a_{130} - a_{121}^2) + \\ &\quad + a_{112} (a_{220}^2 - 4a_{310} a_{130}) + (a_{310} a_{121}^2 - a_{220} a_{211} a_{121} + a_{130} a_{211}^2) \end{aligned}$$

Soll es Lösungen l, m geben, dann muß gelten:

$$a_{112} (a_{220}^2 - 4a_{310} a_{130}) + (a_{310} a_{121}^2 - a_{220} a_{211} a_{121} + a_{130} a_{211}^2) = 0$$

Sei umgekehrt diese Bedingung erfüllt.

Ist dann $a_{211}^2 - 4a_{112} a_{310} \neq 0$,

so gilt für alle Lösungen l von

$$a_{112}l^2 + a_{211}l + a_{310} = 0 : \quad 2a_{112}l + a_{211} \neq 0,$$

und daher existiert je ein eindeutiges m , sodaß

$$(2a_{112}l + a_{211})m + (a_{121}l + a_{220}) = 0.$$

Diese Werte m erfüllen dann nach obiger Rechnung

$$a_{112}m^2 + a_{121}m + a_{130} = 0.$$

Für $a_{112} \neq 0$ erhalten wir also zwei,

für $a_{112} = 0$ (folglich $a_{211} \neq 0$) einen Flachpunkt.

Gilt $a_{211}^2 - 4a_{112}a_{310} = 0$, so ist für die einzige

Lösung l von $a_{112}l^2 + a_{211}l + a_{310} = 0$ auch

$$2a_{112}l + a_{211} = 0, \text{ es folgt}$$

$$\begin{aligned} & 4a_{112}^2(a_{121}l + a_{220})^2 = \\ & = a_{121} \left[2a_{112}a_{121}l + (4a_{112}a_{220} - a_{121}a_{211}) \right] (2a_{112}l + a_{211}) + \\ & + (a_{121}^2 - 4a_{112}a_{130})(a_{211}^2 - 4a_{112}a_{310}) + \\ & + 4a_{112} \left[a_{112}(a_{220}^2 - 4a_{310}a_{130}) + a_{310}a_{121}^2 - a_{220}a_{211}a_{121} + a_{130}a_{211}^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

Falls nun $a_{112} = 0$, so folgt aus $a_{211}^2 - 4a_{112}a_{310} = 0$

$a_{211} = 0$, wegen $a_{310} \neq 0$ gibt es dann keine Lösung l .

Ist $a_{112} \neq 0$, dann haben wir $a_{121}l + a_{220} = 0$ und für

alle Lösungen von $2a_{112}l + a_{211} = a_{112}m^2 + a_{121}m + a_{130} = 0$

sind alle obigen Gleichungen erfüllt.

Wir erhalten hier also zwei bzw keinen Flachpunkt,
je nachdem ob $a_{112} \neq 0$ bzw $= 0$ ist.

In jedem Fall gilt

$$z = lx + my \quad 0 = f|_G(x:y) = a_{004}(lx + my)^4,$$

daher sind dies Flachpunkte $(-m:1:0) = (-\frac{m}{1}:1:0)$

mit Flachtangenten $\{Z = lx + my\}$.

$$\text{Insbesondere gilt } a_{310}m^2 - a_{220}ml + a_{130}l^2 = 0$$

Gilt für einen Flachpunkt mit Tangente $\{Z = lx + my\}$

$z = 0$, so ist $y \neq 0$ und

$$0 = lx + emy = lx + my + (e-1)my = (e-1)my. \text{ Wegen } a_{310} \neq 0$$

folgt $m \neq 0$ und damit $e = 1$.

Satz: Auf der Geraden $\{Z = 0\}$ liegen entweder genau

die zwei Flachpunkte P_1 und P_2 oder

P_1, P_2 und zwei weitere Flachpunkte $(x:y:1)$, die eindeutig bestimmt sind als die weiteren Schnittpunkte der Quartik mit $\{Z = 0\}$, also durch

$$a_{310}x^2 + a_{220}xy + a_{130}y^2 = 0;$$

und zwar je nachdem ob

$$a_{112}(a_{220}^2 - 4a_{310}a_{130}) + a_{310}a_{121}^2 - a_{220}a_{211}a_{121} + a_{130}a_{211}^2 \neq 0$$

$$\text{oder } = 0.$$

Untersuchen wir den Fall $e \neq 1$, $e^4 = 1$.

Die erste Bedingung liefert

$$4(e-1)a_{004}l^3m = a_{112}l^2 + a_{211}l + a_{310}.$$

Wir benutzen diese Gleichung, um m zu eliminieren:

aus der zweiten Bedingung:

$$0 = 8(1-e)a_{004}l^4 \left[6a_{004}(1-e^2)l^2m^2 + 2a_{112}lm + a_{211}m + a_{121}l + a_{220} \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= 3(e+1) [4a_{004}(e-1)l^3_m]^2 - \\
 &- 4a_{112}l^2 [4a_{004}(e-1)l^3_m] - 2a_{211}l [4a_{004}(e-1)l^3_m] + \\
 &+ 8(1-e)a_{004}a_{121}l^5 + 8(1-e)a_{004}a_{220}l^4 = \\
 &= 3(e+1)(a_{112}l^2 + a_{211}l + a_{310})^2 + \\
 &+ (-4a_{112}l^2 - 2a_{211}l)(a_{112}l^2 + a_{211}l + a_{310}) + \\
 &+ 8(1-e)a_{004}a_{121}l^5 + 8(1-e)a_{004}a_{220}l^4 =: P_{1e}(l)
 \end{aligned}$$

aus der dritten Bedingung:

$$\begin{aligned}
 0 &= 16(e-1)^2 a_{004}^2 l^8 [4(1-e^3)a_{004}lm^3 + a_{112}m^2 + a_{121}m + a_{130}] = \\
 &= (-e^2 - e - 1)(a_{112}l^2 + a_{211}l + a_{310})^3 + \\
 &+ a_{112}l^2(a_{112}l^2 + a_{211}l + a_{310})^2 + \\
 &+ 4(e-1)a_{004}a_{121}l^5(a_{112}l^2 + a_{211}l + a_{310}) + \\
 &+ 16(e-1)^2 a_{004}^2 a_{130}l^8 =: P_{2e}(l) \\
 P_{2e}(0) &= (-e^2 - e - 1)a_{310}^3 \neq 0.
 \end{aligned}$$

Haben nun die Polynome P_{1e} und P_{2e} (vom Grad 5 bzw 8 in l) eine gemeinsame Nullstelle l ,

so ist $l \neq 0$, $4(e-1)a_{004}l^3 \neq 0$, und es gibt genau

ein m mit $4(e-1)a_{004}l^3 m = a_{112}l^2 + a_{211}l + a_{310}$,

so daß $f|_G$ eine 4-fache Nullstelle hat.

$$(-e m : l : (1-e)lm) = \left(\frac{-e}{(1-e)l} : \frac{1}{(1-e)m} : 1 \right) = (x_0 : y_0 : 1)$$

ist daher Flachpunkt ($m \neq 0$ wegen $a_{310} \neq 0$).

Die Gleichung der Tangente lautet

$$0 = -lX - mY + Z = \frac{e}{1-e} \cdot \frac{X}{x_0} - \frac{1}{1-e} \cdot \frac{Y}{y_0} + Z.$$

Satz: Flachpunkte mit $z \neq 0$ erhalten wir genau dann, wenn für $e \neq 1$, $e^4 = 1$,

die Polynome P_{1e} und P_{2e} eine gemeinsame Nullstelle l besitzen.

Für den Flachpunkt gilt $(x:z) = (-e:(1-e)l)$.

Für festes e liefern verschiedene Nullstellen l auch verschiedene Flachpunkte.

Verschiedene e liefern ebenfalls verschiedene Flachpunkte (wegen der Form der Tangentengleichung).

Damit ist die Aufgabe, die Zahl der Flachpunkte einer Quartik zu bestimmen, auf die elementare Bestimmung der Anzahl von gemeinsamen Nullstellen zweier Polynome zurückgeführt.

Satz: Die Zahl der Flachpunkte einer nichtsingulären ebenen Quartik der Form (X) ist gegeben durch

$$\sum_{\substack{e^4=1 \\ e \neq 1}} \left| \{ l \in \mathbb{C} \mid P_{1e}(l) = P_{2e}(l) = 0 \} \right| + \\ + \left\{ \begin{array}{ll} 2, & \text{falls } 0 \neq \\ 4, & \text{falls } 0 = \end{array} \left[\begin{array}{l} a_{112}(a_{220}^2 - 4a_{310}a_{130}) + \\ + a_{310}a_{121}^2 - a_{220}a_{121}a_{211} + a_{130}a_{211}^2 \end{array} \right] \right\}$$

1.5 Invarianten

Wie im vorigen Abschnitt bereits klar wurde, gibt es für einen dritten Flachpunkt auf einer Quartik bestimmte einschränkende Bedingungen, entweder die Lage auf der Verbindungsgeraden der ersten beiden Flachpunkte, oder, falls das nicht erfüllt ist, nur diskrete Möglichkeiten für die Lage der Tangente. Dies werden wir durch eine Invariante ausdrücken, die jedem Tripel von Flachpunkten zugeordnet wird.

Wir definieren hier allgemeiner die "Tripelfunktion" und beschreiben sie sowie das "Lagetableau", das für unsere Berechnungen entscheidend sein wird.

Definition: Seien P_1, P_2, P_3 drei Punkte einer kompakten Riemann'schen Fläche X bzw einer Hauptkurve X bzw einer ebenen (evtl. auch singulären) Kurve X (wobei jedoch P_1 nicht singulär sein dürfen). Seien w_1, w_2, w_3 die zu den jeweiligen Punkten gehörenden, bis auf komplexe Vielfache eindeutigen, Differentialformen mit maximaler Nullstellenordnung bzw linearen Formen, die die Tangentialhyperebenen bzw Tangenten bestimmen.

Gilt für alle $1 \leq i \neq j \leq 3$ $w_i(P_j) \neq 0$, so gibt es eindeutige $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{C}$, so daß

$$0 = (l_1 w_1 + w_2)(P_3) = (l_2 w_2 + w_3)(P_1) = (l_3 w_3 + w_1)(P_2).$$

Dann sei $(P_1 P_2 P_3) := l_1 l_2 l_3$ die "Tripelfunktion" von P_1, P_2, P_3 .

Lemma: Für jede Permutation $s \in S_3$ gilt

$$(P_{s(1)} P_{s(2)} P_{s(3)}) = (P_1 P_2 P_3)^{\text{sgn}(s)}.$$

Dies folgt sofort aus der Definition.

Lemma: $(P_1 P_2 P_3) = 1$ gilt genau dann, wenn es

$w = m_1 w_1 + m_2 w_2 + m_3 w_3$ gibt mit $m_1 m_2 m_3 \neq 0$ und
 $w(P_i) = 0$ für $1 \leq i \leq 3$.

Beweis: Sei $(P_1 P_2 P_3) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } w &:= w_1 + l_2 l_3 w_2 + l_3 w_3 = \\ &= w_1 + l_3 (l_2 w_2 + w_3) = \\ &= l_3 l_2 w_2 + (l_3 w_3 + w_1) = \\ &= l_3 w_3 + l_2 l_3 (l_1 w_1 + w_2), \end{aligned}$$

also $w(P_i) = 0$ für $1 \leq i \leq 3$, $1 \cdot l_2 l_3 \cdot l_3 \neq 0$.

Gibt es umgekehrt $w = m_1 w_1 + m_2 w_2 + m_3 w_3$ mit $w(P_i) = 0$,

so folgt aus

$$\begin{aligned} 0 = w(P_1) &= m_1 w_1(P_1) + (m_2 - m_3 l_2) w_2(P_1) + m_3 (l_2 w_2 + w_3)(P_1) = \\ &= (m_2 - m_3 l_2) w_2(P_1) \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$0 = w(P_2) = (m_3 - m_1 l_3) w_3(P_2) \quad \text{und}$$

$$0 = w(P_3) = (m_1 - m_2 l_1) w_1(P_3) :$$

$$m_3 = m_1 l_3$$

$$m_2 = m_3 l_2 = m_1 l_2 l_3$$

$$m_1 = m_2 l_1 = m_1 l_1 l_2 l_3.$$

Wegen $m_1 \neq 0$ ist $l_1 l_2 l_3 = 1$.

Folgerung 1: Sind w_1, w_2, w_3 linear abhängig,

so ist $(P_1 P_2 P_3) = 1$.

Beweis: Es gibt $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{C}$ mit $m_1 w_1 + m_2 w_2 + m_3 w_3 = 0$.

Da je zwei w_i linear unabhängig sind ($w_i(P_j) \neq 0$), gilt $m_1 m_2 m_3 \neq 0$.

Folgerung 2: Liegen P_1, P_2, P_3 auf einer Geraden,

so ist $(P_1 P_2 P_3) = 1$.

Beweis: P_1 und P_2 liegen in der Hyperebene

$\{w_1 + l_2 l_3 w_2 + l_3 w_3 = 0\}$, also auch P_3 , deshalb $(P_1 P_2 P_3) = 1$.

Lemma: Sei X eine kompakte RF oder eine Hauptkurve vom Geschlecht 3 oder eine beliebige ebene Kurve, dann gilt $(P_1 P_2 P_3) = 1$ genau dann, wenn

P_1, P_2, P_3 kollinear oder

w_1, w_2, w_3 linear abhängig sind.

Beweis: Ist $(P_1 P_2 P_3) = 1$, so definieren wir

$w := w_1 + l_2 l_3 w_2 + l_3 w_3$. Dann ist $w(P_i) = 0$, $1 \leq i \leq 3$,

und wenn w_1, w_2, w_3 linear unabhängig sind, ist $w \neq 0$.

Folglich ist $\{w=0\}$ die Gerade durch P_1, P_2 und P_3 .

Die umgekehrte Richtung gilt allgemeiner nach obigen Folgerungen.

Seien P_i, w_i , $1 \leq i \leq 4$ vier Punkte bzw Formen wie in der Definition.

Satz: Dann gilt

$$(P_2 P_3 P_4)(P_1 P_2 P_4) = (P_1 P_2 P_3)(P_1 P_3 P_4)$$

Beweis: Seien $l_{ij} \in \mathbb{C}$ so gewählt, daß:

$$(l_{11} w_2 + w_3)(P_4) = 0 \quad (l_{31} w_1 + w_2)(P_4) = 0$$

$$(l_{12} w_3 + w_4)(P_2) = 0 \quad (l_{32} w_2 + w_4)(P_1) = 0$$

$$(l_{13} w_4 + w_2)(P_3) = 0 \quad (l_{33} w_4 + w_1)(P_2) = 0$$

$$(l_{41} w_1 + w_2)(P_3) = 0 \quad (l_{21} w_1 + w_3)(P_4) = 0$$

$$(l_{42} w_2 + w_3)(P_1) = 0 \quad (l_{22} w_3 + w_4)(P_1) = 0$$

$$(l_{43} w_3 + w_1)(P_2) = 0 \quad (l_{23} w_4 + w_1)(P_3) = 0$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (l_{22} l_{42} + l_{32}) w_2(P_1) &= \\ &= l_{22} (l_{42} w_2 + w_3)(P_1) - (l_{22} w_3 + w_4)(P_1) + (l_{32} w_2 + w_4)(P_1) = 0 \end{aligned}$$

und ebenso

$$(l_{33} l_{12} + l_{43}) w_3(P_2) = 0 \quad (l_{41} l_{23} + l_{13}) w_4(P_3) = 0$$

$$(l_{11} l_{31} + l_{21}) w_1(P_4) = 0, \text{ also ist}$$

$$\begin{aligned} l_{11}l_{12}l_{13} \cdot l_{31}l_{32}l_{33} &= \\ &= l_{11}l_{12}l_{23}l_{41} \cdot l_{31}l_{22}l_{42}l_{33} = l_{21}l_{22}l_{23} \cdot l_{41}l_{42}l_{43}, \end{aligned}$$

das wurde aber behauptet.

Folgerung: $(P_2P_3P_4) = (P_1P_2P_3)(P_1P_3P_4)(P_4P_2P_1)$

Wir betrachten nun wieder Hauptkurven von RF mit Geschlecht 3.

Lemma: $(P_1P_2P_3)$ ist eine projektive Invariante.

Beweis: Die Tripelfunktion kann alternativ durch die Tangentenformen oder Differentialformen bestimmt werden und beide Wege liefern dasselbe Ergebnis. Da letztere aber invariant unter Transformationen der Hauptkurve sind, ist auch $(P_1P_2P_3)$ invariant.

Seien nun P_1, P_2, P_3 Flachpunkte einer Quartik.

Ihre Tangenten $\{w_i = 0\}$ haben nur den (vierfachen) Schnittpunkt P_i mit der Quartik, deshalb gilt immer $w_i(P_j) \neq 0$ für $1 \leq i \neq j \leq 3$.

Wie im zweiten Teil gezeigt wird, können wir durch eine Transformation erreichen, daß

$$P_1 = (1:0:0), \quad P_2 = (0:1:0) \quad \text{und} \quad w_1 = Y, \quad w_2 = X.$$

Die Quartik $\{f = 0\}$ ist dann von der Form

$$(X) \quad \left\{ \begin{aligned} f &= a_{004}Z^4 + a_{112}XYZ^2 + \\ &+ a_{211}X^2YZ + a_{121}XY^2Z + \\ &+ a_{310}X^3Y + a_{220}X^2Y^2 + a_{130}XY^3 \end{aligned} \right.$$

Sei $P_3 = (x:y:z)$, dann ist $x = w_2(P_3) \neq 0 \neq w_1(P_3) = y$.

Ist zunächst $z \neq 0$, so können wir $z = 1$ setzen und wie in 1.4 gezeigt ist dann

$$w_3 = \frac{e}{1-e} \cdot \frac{X}{x} - \frac{1}{1-e} \cdot \frac{Y}{y} + Z \quad \text{mit einem } e \neq 1, \quad e^4 = 1.$$

Wir berechnen:

$$0 = (l_1 Y + X)(x:y:1) = l_1 y + x, \quad l_1 = -\frac{x}{y}$$

$$0 = (l_2 X + \frac{e}{1-e} \frac{X}{x} - \frac{1}{1-e} \frac{Y}{y} + Z)(1:0:0) = l_2 + \frac{e}{1-e} \frac{1}{x}, \quad l_2 = -\frac{e}{(1-e)x}$$

$$0 = (l_3 (\frac{e}{1-e} \frac{X}{x} - \frac{1}{1-e} \frac{Y}{y} + Z) + Y)(0:1:0) = \frac{-l_3}{(1-e)y} + 1, \quad l_3 = (1-e)y$$

$$\text{Deshalb ist } (P_1 P_2 P_3) = -\frac{x}{y} \cdot \frac{-e}{(1-e)x} \cdot (1-e)y = e.$$

Ist nun $z = 0$, dann ist $w_3 = yX - xY + mZ$ mit einem $m \in \mathbb{C}$.

Dann muß gelten:

$$0 = (l_1 Y + X)(x:y:0) = l_1 y + x, \quad l_1 = -\frac{x}{y}$$

$$0 = (l_2 X + yX - xY + mZ)(1:0:0) = l_2 + y, \quad l_2 = -y$$

$$0 = (l_3 (yX - xY + mZ) + Y)(0:1:0) = -l_3 x + 1, \quad l_3 = \frac{1}{x}$$

$$\text{und } (P_1 P_2 P_3) = 1.$$

Wir fassen das zusammen:

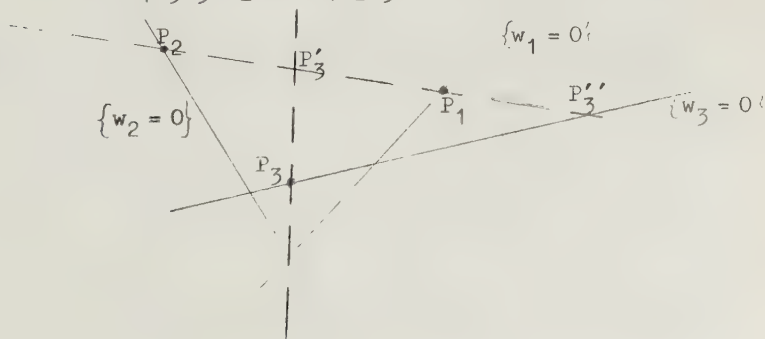
Lemma: Sind P_1, P_2, P_3 Flachpunkte einer nichtsingulären Quartik bzw doppelte Weierstraßpunkte einer RF vom Geschlecht 3, so ist

$$(P_1 P_2 P_3)^4 = 1$$

$(P_1 P_2 P_3) = 1$ gilt genau dann, wenn P_1, P_2, P_3 kollinear sind.

Mit den Bezeichnungen wie in der Zeichnung gilt:

$$DV(P_1 P'_3 P'_3' P_2) = (P_1 P_2 P_3).$$



Beweis: nur noch zum letzten Teil nötig.

Das Doppelverhältnis ist eine projektive Invariante, daher können wir uns auf die obige Lage beschränken. Dann ist aber $P'_3 = (1:1:0)$ und $P'_3 = (1:e:0)$, wenn $e = (P_1 P_2 P_3) \neq 1$. Ist $e = 1$, so folgt $P'_3 = P_3$, in jedem Fall also $e = DV(P_1 P'_3 P'_3 P_2)$.

Liegen P_1, P_2, P_3 auf $\{w=0\}$ und ist P_4 der 4. Schnittpunkt dieser Geraden mit der Quartik, w_4 seine Tangentenform, so ist P_4 2-, 3- oder 4-fache Nullstelle von $w_4|_X$. Daher ist

$\frac{w_4^4}{w_1 w_2 w_3 w_4}$ eine Funktion auf X mit 0, 1 oder 2 Nullstellen.

Da X aber weder vom Geschlecht 0 noch hyperelliptisch ist, kann diese Funktion nicht genau eine oder zwei Nullstellen besitzen. Folglich hat w_4 mit der Quartik einen 4-fachen Schnittpunkt und P_4 ist ebenfalls Flachpunkt:

Lemma: Ist $(P_1 P_2 P_3) = 1$, so existiert ein Flachpunkt P_4 mit $(P_1 P_2 P_4) = (P_1 P_3 P_4) = (P_2 P_3 P_4) = 1$.

Sei P_5 ein weiterer Flachpunkt von X .

Lemma: Sind P_1, P_2, P_3, P_4 kollinear, dann ist

$$(P_5 P_i P_j) \neq (P_5 P_i P_k) \neq 1 \text{ für alle } 1 \leq i \neq j \neq k \leq 4.$$

Insbesondere gibt es zu jedem $1 \leq i \leq 4$ ein $j \neq i$, $1 \leq j \leq 4$, sodaß $(P_5 P_i P_j) = -1$.

Beweis: Zunächst liegt P_5 nicht auf der Geraden

$\overline{P_1 P_2 P_3 P_4}$, daher ist $(P_i P_j P_k) = 1 \neq (P_5 P_j P_k)$ für i, j, k

wie oben.

$$(P_5 P_i P_k) = (P_5 P_i P_k) (P_i P_j P_k) = (P_5 P_i P_j) (P_5 P_j P_k) \neq (P_5 P_i P_j).$$

$(P_5 P_i P_j) \neq 1$ sind für $1 \leq j \leq 4$, $j \neq i$, i fest, drei

verschiedene vierte Einheitswurzeln, so wird auch der Wert -1 angenommen.

Lemma: Genau dann, wenn $(P_1 P_2 P_3) = -1$, existiert eine irreduzible "tangengtgleiche Quadrik" in P_1, P_2, P_3 an X , d.h. eine Quadrik durch die P_i , die mit der Quartik doppelte Schnittpunkte P_i besitzt ($1 \leq i \leq 3$).

Weiter gibt es dann eine Doppeltangente an die Quartik, deren Berührungspunkte die weiteren Schnittpunkte von Quadrik und Quartik sind.

Fallen diese Schnittpunkte zusammen, so ist das ein Flachpunkt.

Beweis: Gibt es eine solche irreduzible Quadrik, so liegen P_1, P_2, P_3 nicht auf einer Geraden. OBdA sei $P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (0:1:0)$, $P_3 = (1:1:1)$, $w_1 = Y$, $w_2 = X$; die Quadrik lautet dann $\{XY - Z^2 = 0\}$ und $w_3 = X+Y-2Z$. Daher ist $(P_1 P_2 P_3) = -1$. Umgekehrt können wir natürlich X von der Form (X) wählen, die Quadrik $\{XY - Z^2 = 0\}$ erfüllt dann die Bedingungen.

Sie entspricht einer quadratischen Differentialform w' mit Divisor $2P_1 + 2P_2 + 2P_3 + P_4 + P_5$. Die meromorphe

Differentialform $w := \frac{w'^2}{w_1 w_2 w_3}$ hat den Divisor $2P_4 + 2P_5$.

w ist also holomorph und die Gerade durch P_4 und P_5 ist Doppeltangente. Für $P_4 = P_5$ hat w den Divisor $4P_4$, also ist P_4 Flachpunkt.

Definition: Seien für $3 \leq l \leq 12$ $P_1, \dots, P_l$ Flachpunkte einer Quartik X .

Sei $I := \{(i, j, k) \mid 1 \leq i, j, k \leq l \text{ } i \neq j \neq k \neq i\}$.

Die Familie $((P_i P_j P_k))_{(i, j, k) \in I}$ von vierten Ein-

heitswurzeln bezeichnen wir als das Lagetableau der Flachpunkte $P_1, \dots, P_l$ von X .

Eine Permutation Π von $P_1, \dots, P_l$ heißt Lagemorphismus,

wenn $(\Pi(P_i) \Pi(P_j) \Pi(P_k)) = (P_i P_j P_k)$ für alle $(i, j, k) \in I$.

Aus dieser Definition folgt offensichtlich, wenn $P_1, \dots, P_l$ alle Flachpunkte von X sind:

Folgerung 1:

$\{((\prod P_i) | (\prod P_j) | (\prod P_k))_{(i,j,k) \in I} \mid \prod \text{Permutation von } \{P_1, \dots, P_l\}\}$
ist eine Invariante von X .

Folgerung 2: Jeder Automorphismus von X ist, auf $\{P_1, \dots, P_l\}$ beschränkt, ein Lagemorphismus.

Ist $((P_i P_j P_k))_{(i,j,k) \in I}$ das Lagetableau von l Flachpunkten einer Quartik X , so gilt für alle $(i,j,k) \in I$:

a) $(P_i P_j P_k)^4 = 1$

b) $(P_i P_j P_k) = (P_j P_k P_i) = (P_k P_i P_j) =$
 $= (P_k P_j P_i)^{-1} = (P_j P_i P_k)^{-1} = (P_i P_k P_j)^{-1}$

c) für $1 \neq \{i, j, k\}$:

$$(P_i P_j P_k) = \frac{(P_1 P_i P_j)(P_1 P_j P_k)}{(P_1 P_i P_k)}$$

d) Ist $(P_i P_j P_k) = 1$, so gilt für jedes

$$m \in \{1, \dots, l\} \setminus \{i, j, k\}$$

entweder $(P_m P_i P_j) = (P_m P_j P_k) = (P_m P_i P_k) = 1$

oder $(P_m P_i P_j) \neq (P_m P_i P_k) \neq (P_m P_j P_k) \neq (P_m P_j P_i),$

wobei alle $\neq 1$ sind.

Wir können also die Aufgabe, alle Quartiken mit (mindestens) l Flachpunkten zu bestimmen ($l \geq 3$), zunächst in zwei Schritte zerlegen:

1. Wir suchen alle Familien $(p_{ijk})_{(i,j,k) \in I}$, die folgenden Bedingungen genügen:

für alle $(i, j, k) \in I$ gilt

$$a) p_{ijk}^4 = 1$$

$$b) p_{ijk} = p_{jki} = p_{kij} = p_{kji}^{-1} = p_{jik}^{-1} = p_{ikj}^{-1}$$

$$c) \text{für } 1 \notin \{i, j, k\} \\ p_{ijk} = \frac{p_{1ij} p_{1jk}}{p_{1ik}}$$

d) falls $p_{ijk} = 1$, so gilt für jedes $m \in \{1, \dots, l\} \setminus \{i, j, k\}$

$$\text{entweder } p_{mij} = p_{mjk} = p_{mik} = 1$$

$$\text{oder } 1 \neq p_{mij} \neq p_{mik} \neq p_{mjk} \neq p_{mji}$$

$$\text{und } p_{mik} \neq 1 \neq p_{mjk}.$$

(aus c) folgt für alle $m \in \{1, \dots, l\} \setminus \{i, j, k\}$:

$$p_{ijk} = \frac{p_{1ij} p_{1jk}}{p_{1ik}} = \frac{p_{1mi} p_{1ij}}{p_{1mj}} \cdot \frac{p_{1mj} p_{1jk}}{p_{1mk}} \cdot \frac{p_{1mk}}{p_{1mi} p_{1ik}} = \frac{p_{mij} p_{mjk}}{p_{mik}} \quad)$$

2. Wir suchen alle Quartiken mit 1 Flachpunkten

$p_1, \dots, p_l$ und für alle $(i, j, k) \in I$:

$$(p_i p_j p_k) = p_{ijk}.$$

Bemerkung: Als verkürzte Schreibweise für das (manchmal sehr umfangreiche) Lagetableau wählen wir die lexikographische Anordnung, also

$$((p_1 p_2 p_3), \dots, (p_1 p_2 p_l), (p_1 p_3 p_4), \dots, (p_1 p_3 p_l), \\ (p_1 p_4 p_5), \dots, \dots, (p_1 p_{l-1} p_l), (p_2 p_3 p_4), \dots \\ \dots, (p_{l-2} p_{l-1} p_l)).$$

Bei der Angabe "verkürztes Lagetableau" handelt es sich nur um den ersten Teil bis $(p_1 p_{l-1} p_l)$, der Teil ab $(p_2 p_3 p_4)$ fehlt dann und kann aus dem angegebenen Teil vollständig berechnet werden.

1.6 Geometrische Bedingungen

Im letzten Abschnitt erhielten wir für die Existenz von mindestens drei Flachpunkten die algebraische Bedingung, daß eine gewisse Invariante nur gewisse Werte annehmen darf.

Wir sahen, welche geometrischen Bedingungen damit verbunden sind.

In diesem Abschnitt wollen wir darüberhinausgehende Forderungen an die Geometrie der Kurven stellen.

Zunächst gilt das

Lemma: Die Tangente in einem Flachpunkt an die Quartik schneidet diese nur im Flachpunkt, d.h. auf der Tangente liegt kein anderer Punkt der Quartik (Nichtsingularität vorausgesetzt).

Seien wieder P_1, P_2, P_3 Flachpunkte einer Quartik, w_1, w_2, w_3 ihre Tangentenformen.

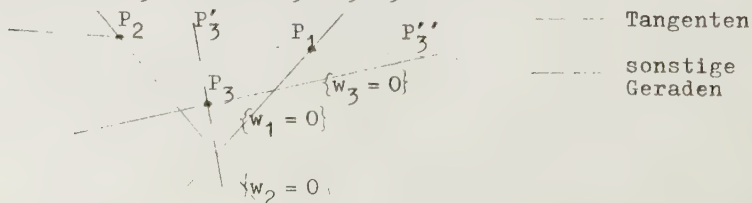
Lemma: $(P_1 P_2 P_3) = 1$ gilt genau dann, wenn P_1, P_2, P_3 auf einer Geraden liegen.

Sei P'_3 der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von P_1 und P_2 mit der Geraden durch P_3 und den Schnittpunkt der Tangenten von P_1 und P_2 (wie in der Zeichnung).

Sei P'_3 der Punkt auf $\overline{P_1 P_2}$ mit $DV(P_1 P'_3 P'_3 P_2) = (P_1 P_2 P_3)$.

Dann geht die Tangente von P_3 durch P'_3 .

(Für $(P_1 P_2 P_3) = 1$ ist $P_3 = P'_3 = P'_3$)



Sei P_4 weiterer Flachpunkt der Quartik und

$$e_0 = (P_1 P_2 P_3) \quad e_1 = (P_1 P_2 P_4) \quad e_2 = (P_1 P_3 P_4) \quad e_4 = (P_2 P_3 P_4).$$

Dann gilt nach einem Lemma aus 1.5 $e_1 e_3 = e_0 e_2$.

Wir untersuchen die geometrischen Bedingungen für P_4 .

Lemma: Genau dann, wenn $e_0 = 1 = e_1 = e_2 = e_3$,

liegt P_4 auf der Geraden $\overline{P_1 P_2 P_3}$.

Ist $e_0 = 1$, sind jedoch nicht alle Werte der Tripelfunktion 1, so sind e_1, e_2, e_3 alle verschieden von 1.

Durch eine projektive Transformation können wir erreichen, daß

$$P_1 = (1:0:0) \quad P_2 = (0:1:0) \quad P_3 = (1:1:0)$$

$$w_1 = Y \quad w_2 = X.$$

Dann ist $w_3 = X - Y + c_3 Z$,

$$P_4 = (x_4 : y_4 : 1) \quad w_4 = \frac{e_1}{1-e_1} \frac{X}{x_4} - \frac{1}{1-e_1} \frac{Y}{y_4} + Z.$$

$$\left[\begin{aligned} & \left(\frac{y_4 - c_3 - x_4}{x_4} X + X - Y + c_3 Z \right) (x_4 : y_4 : 1) = 0 \\ & \left(\frac{-1}{y_4(1-e_1)} (X - Y + c_3 Z) + \frac{e_1}{1-e_1} \frac{X}{x_4} - \frac{1}{1-e_1} \frac{Y}{y_4} + Z \right) (0:1:0) = 0 \\ & \left(\frac{(1-e_1)y_4 x_4}{x_4 - e_1 y_4} \left(\frac{e_1}{1-e_1} \frac{X}{x_4} - \frac{1}{1-e_1} \frac{Y}{y_4} + Z \right) + X \right) (1:1:0) = 0 \end{aligned} \right]$$

daher ist

$$e_3 = \frac{y_4 - c_3 - x_4}{e_1 y_4 - x_4}$$

und P_4 liegt auf der Geraden

$$(1-e_3) X - (1-e_2) Y + c_3 Z = 0.$$

Lemma: Ist $e_0 = 1$, hat jedoch eines der e_1, e_2, e_3 nicht den Wert 1, so sind alle von 1 verschieden und $e_2 = e_1 e_3$.

Sei P'_0 der Schnittpunkt der Tangenten von P_1 und P_2 ,

P'_1 der Schnittpunkt der Tangenten von P_2 und P_3 ,

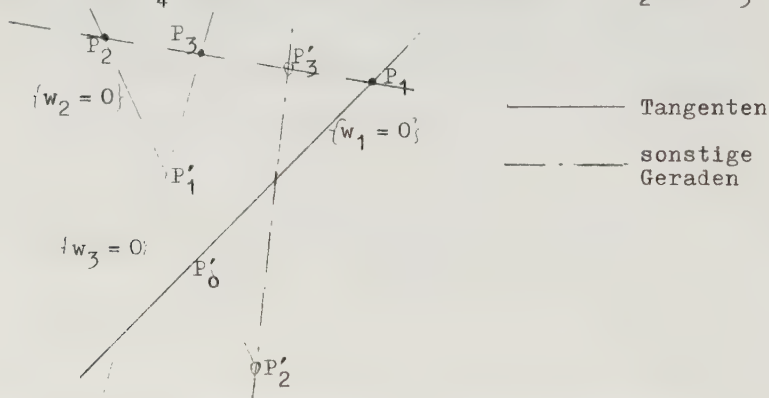
P'_2 der Punkt auf der Tangente von P_2 mit

$$DV(P'_0 P'_1 P'_2 P_2) = \frac{1}{1-e_2}, \text{ falls } P'_0 \neq P'_1, \text{ sonst } P'_2 = P'_0 = P'_1,$$

P'_3 der Punkt auf $\overline{P_1 P_2 P_3}$ mit

$$DV(P_1 P_3 P'_3 P_2) = (1-e_3)(1-e_2)^{-1}.$$

Dann liegt P_4 auf der Verbindungsgeraden von P'_2 und P'_3 .



Beweis: Da Doppelverhältnisse projektiv invariant sind, können wir uns auf den oben beschriebenen Spezialfall beschränken.

Dort ist aber $P'_0 = (0:0:1)$ $P'_1 = (0:c_3:1)$

$$P'_2 = (0:\frac{c_3}{1-e_2}:1) \quad P_2 = (0:1:0)$$

$$P_1 = (1:0:0) \quad P_3 = (1:1:0) \quad P'_3 = (1-e_2:1-e_3:0)$$

und die oben errechnete Gerade geht durch P'_2 und P'_3 .

Ist $(P_1 P_2 P_3) = e_0 \neq 1$, wird jedoch eine der anderen Tripelfunktionen 1, so können wir durch Umbenennung erreichen, daß

$$(P_1 P_2 P_4) = 1 \quad (P_1 P_3 P_4) = e_2 \neq 1 \quad (P_2 P_3 P_4) = e_3 \neq 1.$$

Dann gilt $e_3 = e_0 e_2$.

Durch eine projektive Transformation erreichen wir, daß $P_1 = (1:0:0)$ $P_2 = (0:1:0)$ $P_3 = (1:1:1)$

$$w_1 = Y \quad w_2 = X.$$

Folglich ist $w_3 = \frac{e_0}{1-e_0} X - \frac{1}{1-e_0} Y + Z$,

$$P_4 = (x_4:1:0) \quad w_4 = X - x_4 Y + c_4 Z.$$

$$\left[\begin{aligned} & \left(\frac{1-e_0 x_4}{x_4(1-e_0)} X + \frac{e_0}{1-e_0} X - \frac{1}{1-e_0} Y + Z \right) (x_4:1:0) = 0 \\ & (x_4(e_0-1) \left(\frac{e_0}{1-e_0} X - \frac{1}{1-e_0} Y + Z \right) + X - x_4 Y + c_4 Z) (0:1:0) = 0 \\ & \left(\frac{-1}{1-x_4+c_4} (X - x_4 Y + c_4 Z) + X \right) (1:1:1) = 0 \end{aligned} \right]$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$e_3 = (P_2 P_3 P_4) = \frac{1-e_0 x_4}{1-x_4+c_4},$$

$$\begin{aligned} 0 &= (e_3-1) - x_4(e_3-e_0) + c_4 e_3 = w_4(e_3-1:e_3-e_0:e_3) = \\ &= w_4\left(1 - \frac{1}{e_3}:1 - \frac{1}{e_2}:1\right) \cdot e_3. \end{aligned}$$

Die Tangente von P_4 muß also durch den Punkt

$$\left(1 - \frac{1}{e_3}:1 - \frac{1}{e_2}:1\right) = \left(1 - (P_4 P_3 P_2):1 - (P_4 P_3 P_1):1\right) \text{ gehen.}$$

$$\text{Wegen } (1-e_0)e_3 w_3 \left(1 - \frac{1}{e_3}:1 - \frac{1}{e_2}:1\right) =$$

$$= e_0(e_3-1) - (e_3-e_0) + e_3(1-e_0) = 0$$

ist das der Schnittpunkt der Tangenten von P_3 und P_4 .

Lemma: Ist $e_0 \neq 1$, hat jedoch mindestens eines der e_1, e_2, e_3 den Wert 1, so ist genau eines gleich 1.

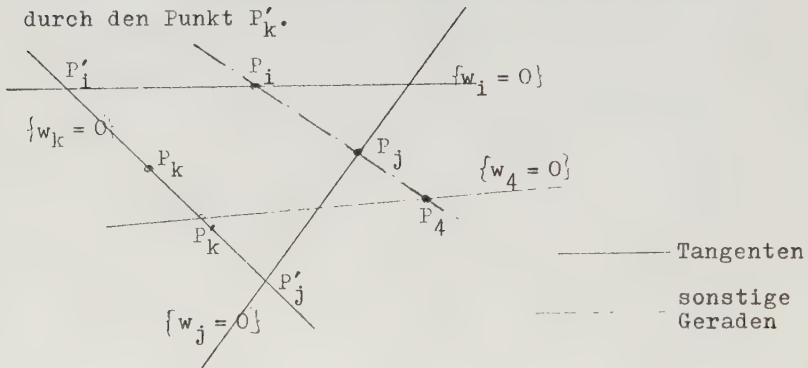
Sei daher $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ so daß $(P_i P_j P_4) = 1$.

Sei P'_i bzw. P'_j der Schnittpunkt der Tangenten von P_k und P_i bzw. P_j (wegen $e_0 \neq 1$ sind P_k, P'_i, P'_j verschieden)

Sei P'_k der Punkt der Tangente von P_k mit

$$DV(P'_i P_k P'_j) = \frac{1 - (P_4 P_k P_i)}{1 - (P_4 P_k P_j)}.$$

Dann liegt P_4 auf $\overline{P_i P_j}$ und die Tangente von P_4 geht durch den Punkt P'_k .



Beweis: Im obigen Spezialfall ist

$$i = 1 \quad j = 2 \quad k = 3$$

$$P'_1 = \left(\frac{e_0 - 1}{e_0} : 0 : 1 \right) \quad P'_2 = (0 : 1 - e_0 : 1) \quad P_3 = (1 : 1 : 1),$$

$$\text{dann ist } P'_3 = (1 - (P_4 P_3 P_2) : 1 - (P_4 P_3 P_1) : 1) = \left(1 - \frac{1}{e_3} : 1 - \frac{1}{e_2} : 1 \right)$$

und die Tangente von P_4 geht durch P'_3 .

Seien schließlich für alle $0 \leq i \leq 3$ $e_i \neq 1$.

Wir können wieder durch eine projektive Transformation erreichen, daß

$$P_1 = (1:0:0) \quad P_2 = (0:1:0) \quad P_3 = (1:1:1)$$

$$w_1 = Y \quad w_2 = X.$$

$$\text{Dann ist} \quad w_3 = \frac{e_0}{1-e_0} X - \frac{1}{1-e_0} Y + Z$$

$$P_4 = (x_4:y_4:1) \quad w_4 = \frac{e_1}{1-e_1} \frac{X}{x_4} - \frac{1}{1-e_1} \frac{Y}{y_4} + Z.$$

$$\left[\begin{aligned} &((-\frac{e_0 x_4 - y_4 + 1 - e_0}{x_4(1-e_0)})X + \frac{e_0}{1-e_0} X - \frac{1}{1-e_0} Y + Z)(x_4:y_4:1) = 0 \\ &(\frac{e_0 - 1}{(1-e_1)y_4}(\frac{e_0}{1-e_0} X - \frac{1}{1-e_0} Y + Z) + \frac{e_1}{1-e_1} \frac{X}{x_4} - \frac{1}{1-e_1} \frac{Y}{y_4} + Z)(0:1:0) = 0 \\ &(\frac{(e_1 - 1)x_4 y_4}{e_1 y_4 - x_4 + (1-e_1)y_4 x_4}(\frac{e_1}{1-e_1} \frac{X}{x_4} - \frac{1}{1-e_1} \frac{Y}{y_4} + Z) + X)(1:1:1) = 0 \end{aligned} \right]$$

$$\text{Hieraus folgt } e_3 = (P_2 P_3 P_4) = \frac{e_0 x_4 - y_4 + 1 - e_0}{x_4 - e_1 y_4 - (1-e_1)x_4 y_4} \quad \text{und}$$

P_4 liegt auf der Quadrik, die durch folgende

Gleichung gegeben wird:

$$\begin{aligned} 0 &= (e_1 - 1)e_3 XY + (e_3 - e_0)XZ + (1 - e_1 e_3)YZ + (e_0 - 1)Z^2 \\ &= (e_0 e_2 - e_3)XY + (e_3 - e_0)XZ + (1 - e_0 e_2)YZ + (e_0 - 1)Z^2 \\ &(\text{wegen } e_1 e_3 = e_0 e_2). \end{aligned}$$

Diese Quadrik geht durch die Punkte $P_1, P_2, P_3, P_1', P_2'$,

wobei $P_1' = (1 - e_0 : 0 : e_3 - e_0)$ und $P_2' = (0 : 1 - e_0 : 1 - e_0 e_2)$.

Sie ist durch diese Bedingung eindeutig bestimmt
(wobei für $e_3 = e_0$ oder $e_0 e_2 = 1$ ein doppelter
Schnittpunkt mit der Quartik gefordert wird).

Lemma: Seien alle $e_i \neq 1$ für $0 \leq i \leq 3$.

Sei P'_0 der Schnittpunkt der Tangenten von P_1 und P_2 ,

P'_1 " " " " " P_1 und P_3 ,

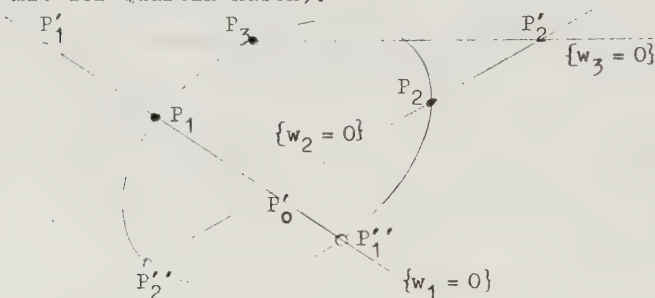
P'_2 " " " " " P_2 und P_3 ,

seien P''_1 bzw P''_2 die Punkte auf der Tangente von

P_1 bzw P_2 mit $DV(P'_0 P'_1 P''_1 P_1) = (-e_0 : e_3 - e_0)$

bzw $DV(P'_0 P'_2 P''_2 P_2) = (1 : 1 - e_0 e_2)$.

Dann liegt P_4 auf der eindeutig bestimmten Quadrik durch P_1, P_2, P_3, P''_1 und P''_2 (für $P''_1 = P_1$ bzw $P''_2 = P_2$ soll die Quadrik dort einen doppelten Schnittpunkt mit der Quartik haben).



Beweis: Im Spezialfall gilt

$$P'_0 = (0:0:1) \quad P'_1 = (1-e_0:0:-e_0) \quad P'_2 = (0:1-e_0:1).$$

Dann sind P''_1, P''_2 und die Quadrik wie oben errechnet.

Für die späteren Rechnungen ist es hilfreich, alle solchen Quadriken für den obigen Spezialfall anzugeben. Für $e_i \neq 1$ liegt P_4 also auf dem Kegelschnitt $\{K=0\}$, wobei K die folgende quadratische Form ist:

(siehe Tabelle nächste Seite)

e_0	e_1	e_2	e_3	K
-1	-1	-1	-1	$XY - Z^2$
-1	-1	i	i	$XY + (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})XZ + (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})YZ - iZ^2$
-1	-1	-i	-i	$XY + (-\frac{1}{2} - \frac{i}{2})XZ + (-\frac{1}{2} - \frac{i}{2})YZ + iZ^2$
-1	i	-1	-i	$XY - iXZ + (-1+i)Z^2$
-1	i	i	-1	$XY + iYZ + (-1-i)Z^2$
-1	i	-i	1	---
-1	-i	-1	i	$XY + iXZ + (-1-i)Z^2$
-1	-i	i	1	---
-1	-i	-i	-1	$XY - iYZ + (-1+i)Z^2$
i	-1	-1	i	$XY + (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})YZ + (-\frac{1}{2} - \frac{i}{2})Z^2$
i	-1	i	1	---
i	-1	-i	-1	$XY + (-\frac{1}{2} - \frac{i}{2})XZ + (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})Z^2$
i	i	-1	-1	$XY - iXZ + iYZ - Z^2$
i	i	i	i	$XY + (-1+i)YZ - iZ^2$
i	i	-i	-i	$XY + (-1-i)XZ + iZ^2$
i	-i	-1	1	---
i	-i	i	-i	$XY + (-1+i)XZ + (-1-i)YZ + Z^2$
i	-i	-i	i	$XY - Z^2$
-i	-1	-1	-i	$XY + (-\frac{1}{2} - \frac{i}{2})YZ + (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})Z^2$
-i	-1	i	-1	$XY + (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})XZ + (-\frac{1}{2} - \frac{i}{2})Z^2$
-i	-1	-i	1	---
-i	i	-1	1	---
-i	i	i	-i	$XY - Z^2$
-i	i	-i	i	$XY + (-1-i)XZ + (-1+i)YZ + Z^2$
-i	-i	-1	-1	$XY + iXZ - iYZ - Z^2$
-i	-i	i	1	$XY + (-1+i)XZ - iZ^2$
-i	-i	-i	-i	$XY + (-1-i)YZ + iZ^2$

Ist $P_3 = (x:y:z)$, so lautet die quadratische Form:

$$(e_0 e_2 - e_3) z^2 XY + (e_3 - e_0) yz XZ + (1 - e_0 e_2) xz YZ + (e_0 - 1) xy Z^2,$$

wie man mittels der Transformation

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \text{ leicht nachpr\u00fcft.}$$

Gibt es mehr als vier Flachpunkte, so mu\u00df jedes
Quadrupel von Flachpunkten eine solche geometrische
Bedingung erf\u00fcllen.

Dies kann dazu f\u00fchren, da\u00df f\u00fcr ein vorgegebenes
Lagetableau die L\u00f6sungen der geometrischen Bedin-
gungen andere Forderungen verletzen, zB $P_i \neq P_j$ f\u00fcr $i \neq j$
oder $w_i(P_j) \neq 0$ f\u00fcr $i \neq j$.

Wir k\u00f6nnen daher den in 1.5 genannten Teil 2 unserer
Aufgabe noch einmal aufschl\u00fcsseln in

2a Wir suchen Punkte P_i und lineare Formen w_i (evtl
in Abh\u00e4ngigkeit von Parametern), soda\u00df

$$(P_i P_j P_k) = p_{ijk} \text{ f\u00fcr alle } (i, j, k) \in I$$

(das kann ja ohne Bezug auf eine Quartik berechnet
werden), und da\u00df die "Flachpunkte" P_i und die
"Flachtangenten" w_i die obigen geometrischen
Bedingungen erf\u00fcllen.

2b Wir suchen alle nichtsingul\u00e4ren Quartiken mit den
1 Flachpunkten P_i und Flachtangenten $\{w_i = 0\}$

Dies geschieht durch die Berechnung der Koeffizienten
bestimmter solcher Quartiken.

2 Familien von Quartiken mit n Flachpunkten

Satz: Jede nichtsinguläre Quartik mit n Flachpunkten ($0 \leq n \leq 12$) besitzt ein Lagetableau $T_{n,i}$ ($1 \leq i \leq i_n$) und ist isomorph zu einer Quartik $Q_{n,i}(p)$, $p \in M_{n,i}$ (Definition siehe 2.n.i), höchstens aber zu endlich vielen.

Für $0 \leq n \leq 12$ und $1 \leq i \leq i_n$ ist $(Q_{n,i}(p))_{p \in M_{n,i}}$ eine

Familie von nichtsingulären Quartiken mit mindestens $n'(n,i) \geq n$ Flachpunkten, diese Funktion kann nicht verbessert werden.

Isomorphe Quartiken $Q_{n,i_1}(p_1)$ und $Q_{n,i_2}(p_2)$ mit $p_1 \in M_{n,i_1}$, $p_2 \in M_{n,i_2}$, $i_1 \neq i_2$, besitzen mehr als n Flachpunkte.

Weiter haben alle Quartiken $Q_{n,i}(p)$ eine Automorphismengruppe isomorph zu $G_{n,i}$ unabhängig von p .

Für jedes n,i gibt es eine geometrische Bedingung, die notwendig und hinreichend dafür ist, daß eine nichtsinguläre Quartik zu einer Quartik $Q_{n,i}(p)$ isomorph ist.

$(Q_{n,i}(p))_{p \in M_{n,i}}$ sind holomorphe Familien von

Riemann'schen Flächen (Definition siehe Seite 63) mit $24 - n'(n,i)$ Weierstraßpunkten und die Bilder dieser Familien im Torelliraum haben die Dimensionen der Parameterräume $M_{n,i}$.

Beweis: In 2.n zeigen wir die Existenz solcher Lagetableaus für $n \geq 3$, für $n < 3$ ist das Lagetableau leer. Die Existenz einer isomorphen Quartik $Q_{n,i}(p)$ wird in 2.n.i gezeigt.

Die Quartiken $Q_{n,i}(p)$, $p \in M_{n,i}$ sind nach Definition nichtsingulär.

Der Beweis für die Existenz von $n'(n.i)$ Flachpunkten läuft wie in 1.4 angegeben, er ist rein mechanischer Natur und wird deshalb weggelassen.

In 2.n.i geben wir eine nichtsinguläre Quartik $Q_{n.i}(p_0)$, $p_0 \in M_{n.i}$ an, die genau $n'(n.i)$ Flachpunkte besitzt (wieder nach 1.3 und 1.4).

Für jede Quartik mit genau n Flachpunkten und Lagetableaus $T_{n.i_1}$ und $T_{n.i_2}$ gibt es eine Permutation der Flachpunkte, die die Lagetableaus ineinander überführt. Dies ist für $i_1 \neq i_2$ nicht möglich (siehe 2.n).

In 2.n.i geben wir für $Q_{n.i}(p)$ Automorphismen an, die eine zu $G_{n.i}$ isomorphe Gruppe erzeugen.

Auch die geometrischen Bedingungen findet man in 2.n.i.

Der Beweis des letzten Teils erfordert einige Vorbereitung, dies folgt im Anschluß an die Tabelle.

In der folgenden Tabelle geben wir einen Überblick über wichtige Daten der Familien von Quartiken, die wir erhalten; wir geben die Dimension ihres Parameter-raums (und damit auch die Dimension des Bildraums im Torelliraum) an, die Zahl der Flachpunkte, die mindestens vorkommen ($n'(n.i)$) sowie die von p unabhängige Isomorphieklasse $G_{n.i}$ einer Automorphismengruppe.

Die "Oberfamilien" erhalten wir, indem wir die Lagetableaus von $m \leq n$ der $n'(n.i)$ Flachpunkte bestimmen. Deswegen ist diese Angabe nur bis auf Isomorphie zu verstehen. Wir geben die "Oberfamilien" durch ihren Index $m.j$ an, wobei " $=m.j$ " bedeutet, daß die Familien mit Index $n.i$ und $m.j$ identisch sind.

Nicht angegeben werden dabei solche Familien, die sich auch als Oberfamilien angegebener Oberfamilien ergeben.

$n.i$	$\dim M_{n.i}$	$n'(n.i)$	$G_{n.i}$	Oberfamilien (bis auf Isomorphie)
0.1	6	0	1	---
1.1	5	1	1	0.1
2.1	4	2	1	1.1
3.1	3	4	1	2.1
3.2	3	3	1	2.1
3.3	3	3	1	2.1
4.1	3	4	1	=3.1
4.2	2	4	V_4	3.2
4.3	2	4	1	3.2, 3.3
4.4	2	4	C_2	3.3
4.5	2	4	1	3.3
5.1	2	5	1	4.1, 3.2, 3.3
5.2	1	6	V_4	4.2, 4.3, 4.4
5.3	1	5	1	4.3, 4.5
5.4	1	5	C_2	4.3, 4.4
5.5	1	5	1	4.3
5.6	1	6	D_3	4.4, 4.5
6.1	1	7	C_2	5.1, 4.3, 4.4
6.2	1	8	D_4	5.1, 4.2, 4.3, 4.4
6.3	1	6	C_2	5.1, 4.3, 4.4, 4.5
6.4	1	6	1	5.1, 4.3, 4.5
6.5	1	6	V_4	= 5.2
6.6	1	6	D_3	= 5.6

$n.i$	$\dim M_{n.i}$	$n'(n.i)$	$G_{n.i}$	Oberfamilien (bis auf Isomorphie)
7.1	1	7	C_2	= 6.1
7.2	1	8	D_4	= 6.2
7.3	0	7	C_2	6.3, 6.4, 5.3, 5.4, 5.5
7.4	0	7	1	6.4, 5.3, 5.5
7.5	0	8	D_4	6.5, 5.4, 5.5
8.1	0	9	D_3	7.1, 6.3, 6.4, 6.6, 5.3, 5.4
8.2	1	8	D_4	= 7.2
8.3	0	8	D_4	= 7.5
9.1	0	9	D_3	= 8.1
9.2	0	12	$G_{9.2}$	8.2, 6.3, 6.5, 6.6, 5.3
9.3	0	12	S_4	8.2, 7.1, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 5.3, 5.4, 5.5
$n \in \{10, 11, 12\}$				
n.1	0	12	$G_{9.2}$	= 9.2
n.2	0	12	S_4	= 9.3

In Spalte 4 der Tabelle bedeuten:

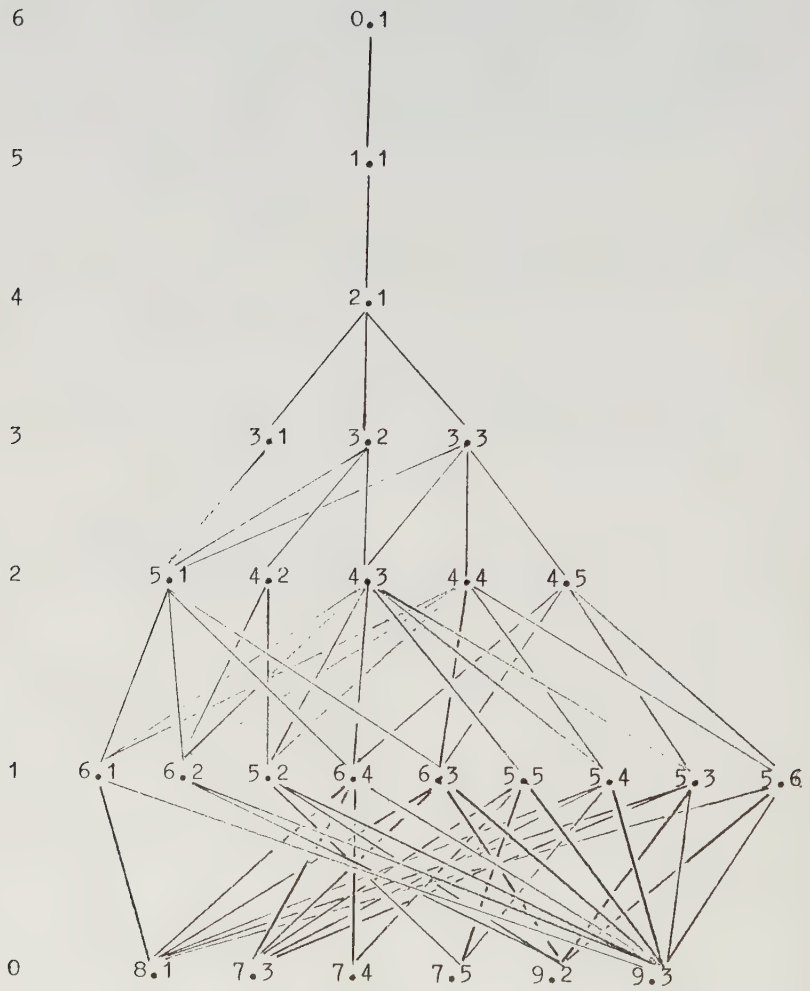
- 1 die triviale Gruppe
- C_2 die zyklische Gruppe der Ordnung 2
- V_4 die Klein'sche Vierergruppe, $V_4 \cong C_2 \oplus C_2$
- D_3 die Diedergruppe der Ordnung $2 \cdot 3 = 6$, nichtabelsch,
 $D_3 \cong \langle S, T \mid S^3 = T^2 = 1, S^T = S^{-1} \rangle = S_3$
- D_4 die Diedergruppe der Ordnung $2 \cdot 4 = 8$,
 $D_4 = \langle S, T \mid S^4 = T^2 = 1, S^T = S^{-1} \rangle$
- S_4 die symmetrische Gruppe auf vier Elementen,
 $S_4 = \langle R, S, T, U \mid R^2 = S^2 = T^3 = U^2 = 1,$
 $R^S = R, R^T = RS, S^T = R,$
 $R^U = S, S^U = R, T^U = T^2 \rangle$
- $G_{9.2}$ eine Gruppe mit 96 Elementen,
 $G_{9.2} = \langle R, S, T, U \mid R^4 = S^4 = T^3 = U^2 = 1,$
 $R^S = R, R^T = R^3 S^3, S^T = R,$
 $R^U = S, S^U = R, T^U = RT^2 \rangle$

Spalte 5, d.h. die Inklusionen (bis auf Isomorphie) der Familien $(Q_{n,i}(p))_{p \in M_{n,i}}$, werden im folgenden

Diagramm noch einmal aufgezeigt.

$\dim M_{n,i}$

$n.i$



Wir wollen nun präzisieren, was wir unter einer holomorphen Familie von RF verstehen wollen.

Definition: Eine Familie $(R_t)_{t \in T}$ von Riemann'schen Flächen über einem Raum T mit komplexer Struktur heiße holomorph in $t_0 \in T$, wenn für eine Basis B_0 der ersten Homologiegruppe $H_1(R_{t_0})$ eine Umgebung U von t_0 in T existiert, sodaß es eine holomorphe Abbildung F von U in den Torelliraum gibt mit $F(t_0) = \langle R_{t_0}, B_0 \rangle$ und für alle $t \in U$ $F(t) = \langle R_t, . \rangle$, d.h. t_0 wird auf die Torelli-Äquivalenzklasse von R_{t_0} und B_0 abgebildet und die konformen Äquivalenzklassen von R_t und $F(t)$ stimmen überein.

$(R_t)_{t \in T}$ heiße holomorph, wenn sie in allen $t_0 \in T$ holomorph ist.

Bemerkung: 1. Für die Definition des Torelliraumes und Literatur siehe die Artikel [Ahlfors], [Bers], [Rauch].

2. Ist $(R_t)_{t \in T}$ in $t_0 \in T$ holomorph, so gibt es für jede Basis B von $H_1(R_{t_0})$ eine holomorphe Abbildung wie oben. Man kann nämlich den Torelliraum lokal mit dem Raum der Riemann'schen Matrizen identifizieren, der Übergang von $\langle R_{t_0}, B_0 \rangle$ zu $\langle R_{t_0}, B \rangle$ geschieht dann mittels einer ganz-unimodularen Matrix, die natürlich holomorph operiert.

3. Eine einsichtigere Definition einer holomorphen Familie von RF wäre natürlich die, daß die entsprechende Abbildung in den Raum der konformen Äquivalenzklassen (Modulraum) holomorph sein soll. Dazu benötigt man jedoch die komplexe Struktur dieses Raumes, der Singularitäten hat.

Jedoch ist die Überlagerung des Torelliraumes über

dem Modulraum holomorph [Bers, On Moduli...].
Deshalb sind unsere holomorphen Familien auch in diesem Sinne holomorph.

Wir wollen nun zeigen, daß die Familie der nicht-singulären Quartiken, parametrisiert mit ihren Koeffizienten, eine holomorphe Familie ist.

Lemma: Ist $X_p = \left\{ \sum_{i+j+k=4} a_{ijk} X^i Y^j Z^k = 0 \right\}$ die nicht-singuläre Quartik mit den Koeffizienten $p' = (a_{400} : a_{310} : a_{301} : \dots : a_{004}) \in \mathbb{P}^{14}$, so können wir Wege $v_1, \dots, v_6$ auf X_p wählen, sodaß die normalisierten Riemann'schen Perioden τ_{ij} holomorphe Funktionen in einer Umgebung von $p \in \mathbb{P}^{14}$ sind.

Beweis: Sei $F_p \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ die zu p' gehörende Form 4. Grades.

Sei nun X_p nichtsingulär und $P_0 = (x_0 : y_0 : z_0) \notin X_p$, weiter X', Y', Z' lineare Formen, sodaß $\{X' = 0\}$ und $\{Z' = 0\}$ verschieden sind und durch P_0 gehen, $\{Y' = 0\}$ jedoch nicht. Dann sind X', Y', Z' linear unabhängig.

Sei $F_p(X, Y, Z) = F'_p(X', Y', Z')$. F'_p ist ebenfalls eine Form vierten Grades.

$F'_p(x, y, 1) \in \mathbb{C}[x, y]$ ist die Gleichung einer vierblättrigen Überlagerung $x: X_p \rightarrow \mathbb{P}^1$, wobei $x(X:Y:Z) = (X':Z')$.

Seien $P_1, \dots, P_{12}$ die Schnittpunkte von $\{F_p = 0\}$ und $\{x_0 F_p X + y_0 F_p Y + z_0 F_p Z = 0\}$, nicht notwendig verschieden.

Dann ist $\{P_1, \dots, P_{12}\}$ die Menge der Verzweigungspunkte von x : genau in den Punkten von X_p , deren Tangenten durch P_0 gehen, verzweigt die Projektion von P_0 aus.

Sei $W := x(\{P_1, \dots, P_{12}\}) \cup \{\infty\}$ die Menge der kritischen Werte von x und der unendliche Punkt von $\mathbb{P}^1$.

Sei nun $P_p \in X_p$ mit $x(P_p) \notin W$, und seien

$v_1, \dots, v_6: [0, 1] \rightarrow X_p$ sechs geschlossene C^1 -Wege auf X_p mit Anfangs- und Endpunkt P_p , die eine Basis der Homotopiegruppe von X_p ergeben. Wir wählen sie so, daß $x(v_i([0, 1])) \cap W = \emptyset$.

Es gibt dann eine Umgebung U von p in $\mathbb{P}^{14}$, sodaß für alle $p' \in U$ $X_{p'}$ nichtsingulär ist, P_0 auch nicht auf $X_{p'}$ liegt und die (stetig von p' abhängenden) Schnittpunkte $P_{1p'}, \dots, P_{12p'}$ von $\{F_{p'} = 0\}$ und

$\{x_0 F_{p'} + x_1 Y_0 F_{p'} + Y^2 Z_0 F_{p'}, Z = 0\}$ über einer offenen Umgebung W' von W liegen (die nicht von p' abhängt), die die Wege $x \circ v_i$ nicht trifft (d.h. $x(P_{ip'}) \in W'$ und

$x(v_i([0, 1])) \cap W' = \emptyset$), und daß es eine holomorphe Funktion y_p auf U gibt mit $F_{p'}(x(P_p), y_p(p'), 1) = 0$ (wobei $F_{p'}(X', Y', Z') = F_p(X, Y, Z)$ analog zu oben).

Sei dann $P_{p'}$ der durch $x(P_{p'}) = x(P_p)$, $y(P_{p'}) = y_p(p')$ eindeutig bestimmte Punkt.

Dann sind $x \circ v_i$ sechs geschlossene Wege mit Anfangspunkt $x(P_{p'})$ auf $\mathbb{P}^1 \setminus W'$.

Seien $v_{ip'}$ die eindeutigen Liftungen von $x \circ v_i$ mit Anfangspunkt $P_{p'}$. Sie sind aus topologischen Gründen geschlossen und bilden eine Basis der Homotopiegruppe von $X_{p'}$, (man kann eine Homotopie konstruieren).

Ist $G_{p'}$ die Form dritten Grades

$G_{p'}(X', Y', Z') = x_0 F_{p'} + x_1 Y_0 F_{p'} + Y^2 Z_0 F_{p'}, Z'$, so bilden

$w_1 = \frac{dx}{G_{p'}(x, y, 1)}$, $w_2 = xw_1$, $w_3 = yw_1$ eine Basis der

holomorphen Differentialformen auf $X_{p'}$, denn

dx hat den Divisor $\sum_{i=1}^{12} P_{ip'} - 2 \sum_{i=1}^4 P_{ip'}^\infty$, wobei

$P_{ip'}^\infty$ die Punkte von $X_{p'}$ über $x = \infty$ sind,

$G_p(x, y, 1)$ hat den Divisor $\sum_{i=1}^{12} P_{ip} - 3 \sum_{i=1}^4 P_{ip}^\infty$ und

die Divisoren von x und y sind $\geq - \sum_{i=1}^4 P_{ip}$.

Es gibt eine Unterteilung $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1\}$ von $[0, 1]$, sodaß x auf Umgebungen U_{ij} von $v_{ip}, ([t_j, t_{j+1}])$ Karte ist. Dann sind $y_{ij} := y \circ (x|_{U_{ij}})^{-1}$ holomorphe Funktionen in $x(U_{ij})$ und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{v_{ip}}^{w_1} &= \int_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{x \circ v_{ip}(t) dt}{G_p(x(v_{ip}(t)), y(v_{ip}(t)), 1)} = \\ &= \int_{j=0}^{N-1} \int_{x \circ v_{ip} \left| [t_j, t_{j+1}] \right.} \frac{dx'}{G_p(x', y_{ij}(x'), 1)} \end{aligned}$$

Wegen $x \circ v_{ip} = x \circ v_i$ hängen die Integrationswege nicht von p' ab.

Die Funktionen y_{ij} sind holomorphe Funktionen in x' und p' , denn $y_{i0}(x(v_{ip}(0))) = y_{i0}(x(P_p)) = y(P_p) = y_p(p')$ ist holomorph in p' und y_{i0} erhalten wir als eindeutige stetige Lösung von $F'_p(x', y_{i0}(x'), 1) = 0$ mit obiger Anfangsbedingung.

Die Koeffizienten dieser Gleichung sind aber holomorph in x' und p' . Deswegen ist y_{i0} holomorph in x' und p' , mit Induktion folgt dasselbe für y_{ij} , $1 \leq j < N-1$.

Folglich ist $G_p(x', y_{ij}(x'), 1)$ eine holomorphe Funktion, die auf obigem Integrationsweg $x \circ v_{ip} \left| [t_j, t_{j+1}] \right.$ keine Nullstellen hat und $\int_{v_{ip}} w_1$ ist holomorph in der

Variablen p' . Analog erhalten wir auch, daß $\int_{v_{ip}} w_2$ und $\int_{v_{ip}} w_3$ holomorphe Funktionen von p' sind.

Bekanntlich ist unter unseren Voraussetzungen

$(\int_{v_{ip'}} w_j)_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}$ nicht singulär, daher ist

$$(c_{ij})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} = (\int_{v_{ip'}} w_j)_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}^{-1}$$

die normalisierte Riemann'sche Periodenmatrix und ihre Elemente sind holomorphe Funktionen von p' solange $p' \in U$.

Die Konstruktionen im Lemma hängen ersichtlich nicht von der getroffenen Wahl der Punkte, Linearformen und Wege ab, sondern lediglich von den Homologieklassen der Wege.

Satz: Sei $p \in M \subset \mathbb{P}^{14}$, wobei M diejenige offene Menge ist, die den nichtsingulären Quartiken entspricht. Für jede Basis B der ersten Homologiegruppe $H_1(X_p)$ gibt es eine Umgebung U von p in M und eine holomorphe Abbildung von U in den Torelliraum, die p in $\langle X_p, B \rangle$ abbildet und $p' \in U$ in $\langle X_{p'}, . \rangle$ überführt.

Deshalb ist die Familie $(X_p)_{p \in M}$ von nichtsingulären Quartiken, wenn man sie als Riemann'sche Flächen betrachtet, eine holomorphe Familie (wobei $M \subset \mathbb{P}^{14}$ die kanonische komplexe Struktur hat).

Beweis: Wir wählen Wege $v_1, \dots, v_6$ als Repräsentanten der Basis und einen Punkt $p \in X_p$. Es gibt sogar homotope Wege mit Anfangs- und Endpunkt p , die die selben Homologieklassen repräsentieren. Wir bezeichnen sie wieder mit v_i , sie bilden offensichtlich eine Basis der Homotopiegruppe und gehen oBdA nicht durch die kritische Menge W aus dem Lemma. Es gibt also eine Umgebung U von p in M , sodaß die Riemann'schen Perioden c_{ij} (bezüglich der konstruierten Wege)

auf U holomorphe Funktionen sind.

Nach [Rauch] und [Ahlfors] bilden für nichthyper-elliptische Flächen $3g-3=6$ dieser τ_{ij} eine lokale

Karte des Torelliraumes.

Deshalb ist dann die Abbildung

$p' \mapsto \langle X_p, \{v_{1p}, \dots, v_{6p}\} \rangle$ von U in den Torelli-
raum holomorph.

Zum Abschluß des Beweises des ersten Satzes von 2 ist
nur noch zu bemerken:

Die Quartiken $Q_{n,i}(p)$ sind durch Formen vierten Grades

$\sum_{i+j+k=4} a_{ijk}(p) X^i Y^j Z^k$ bestimmt, wobei

$p' \mapsto (a_{400}:a_{310}:a_{301}:\dots:a_{004}) \in M \subset \mathbb{P}^{14}$

auf $M_{n,i}$ holomorph ist (die Komponenten sind sogar
rationale Funktionen).

Daher sind die zusammengesetzten Abbildungen

$M_{n,i} \rightarrow M$ in den Torelliraum

holomorph und der Satz ist bewiesen, denn die Fasern
der zusammengesetzten Abbildungen sind nach Konstruk-
tion endlich und die Dimension des Bildes im Torelli-
raum gleich der Dimension des Parameterraums.

Bemerkung: Die den einzelnen Fällen beigefügten
Zeichnungen sollen jeweils die geometrische Lage
verdeutlichen. Sie enthalten so viel geometrische
Information wie möglich, auch wenn die entsprechende
Konfiguration im $\mathbb{R}^2$ tatsächlich nicht existiert.
Auch erheben gezeichnete Kurven nicht den Anspruch,
reelle Bilder tatsächlicher Quartiken zu sein.

2.0

2.0.1 Nichtsinguläre Quartiken

Jede nichtsinguläre Quartik hat mindestens 12 verschiedene Wendepunkte.

Sei P_1 ein Wendepunkt, $\{w_1 = 0\}$ seine Tangente.

P_1 ist dreifacher Schnittpunkt der Tangente mit der Quartik, deshalb liegt auf $\{w_1 = 0\}$ höchstens noch ein weiterer Punkt.

Es gibt also mindestens zehn Wendepunkte, die nicht auf $\{w_1 = 0\}$ liegen.

Lemma: Höchstens sechs Wendetangenten einer Quartik treffen sich in einem Punkt.

Beweis: Den Wendepunkten entsprechen auf der Dualkurve (Grad 12) Spitzen, wovon höchstens 6 auf einer Geraden liegen können.

Die zehn Wendetangenten gehen deshalb nicht alle durch P_1 . Sei P_2 ein Wendepunkt, der nicht auf $\{w_1 = 0\}$ liegt und dessen Tangente $\{w_2 = 0\}$ nicht durch P_1 geht.

Auf der Verbindungsgerade $\overline{P_1 P_2}$ liegen maximal vier Punkte der Quartik, auf $\{w_1 = 0\}$ und $\{w_2 = 0\}$ zusätzlich höchstens noch je ein Punkt.

Daher gibt es mindestens sechs Wendepunkte, die weder auf $\overline{P_1 P_2}$ noch auf $\{w_1 = 0\}$ noch auf $\{w_2 = 0\}$ liegen.

Die Wendetangenten gehen nach dem Lemma nicht alle durch den Schnittpunkt der Tangenten von P_1 und P_2 . Deshalb gibt es einen Wendepunkt P_3 , der nicht auf $\overline{P_1 P_2}$ oder $\{w_1 = 0\}$ oder $\{w_2 = 0\}$ liegt und dessen Tangente nicht durch den Schnittpunkt von $\{w_1 = 0\}$ und $\{w_2 = 0\}$ geht.

Sei $\overline{P_1 P_2} = \{w' = 0\}$ und die Linearformen w_1, w_2, w' so normiert, daß $w_1(P_3) = w_2(P_3) = w'(P_3)$.

Ist $w_1 = a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z$,

$$w_2 = a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z,$$

$$w' = a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z,$$

so wird durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

eine nichtsinguläre projektive Transformation T erklärt mit $T(P_1) = (1:0:0)$,

$$T(P_2) = (0:1:0),$$

$$T(P_3) = (1:1:1),$$

$$T(\{w_1 = 0\}) = \{Y = 0\}, \quad T(\{w_2 = 0\}) = \{X = 0\}.$$

Wir betrachten jetzt nur noch die (isomorphe) Bildquartik, behalten aber die ursprünglichen Bezeichnungen bei.

Ist die Quartik durch $\{f = 0\}$ gegeben, so ist f ein homogenes Polynom vom Grad 4.

Wegen P_1 (P_2) Wendepunkt hat $f|_{\{Y=0\}}$ ($f|_{\{X=0\}}$) die dreifache Nullstelle P_1 (P_2), also ist

$$\begin{aligned} f = & a_{004}Z^4 + \\ & + a_{103}XZ^3 + a_{013}YZ^3 + \\ & + a_{112}XYZ^2 + \\ & + a_{211}X^2YZ + a_{121}XY^2Z + \\ & + a_{310}X^3Y + a_{220}X^2Y^2 + a_{130}XY^3. \end{aligned}$$

P_3 ist Punkt der Quartik, deshalb gilt

$$0 = f(P_3) = a_{004} + a_{103} + a_{013} + a_{112} + a_{211} + a_{121} + a_{310} + a_{220} + a_{130}.$$

Die Tangente G in P_3 ist durch die lineare Form

$$\begin{aligned} g_1 X + g_2 Y + g_3 Z = \\ = (3a_{310} + 2a_{220} + a_{130} + 2a_{211} + a_{121} + a_{112} + a_{103}) X + \\ + (a_{310} + 2a_{220} + 3a_{130} + a_{211} + 2a_{121} + a_{112} + a_{013}) Y + \\ + (a_{211} + a_{121} + 2a_{112} + 3a_{103} + 3a_{013} + 4a_{004}) Z \quad \text{gegeben,} \end{aligned}$$

wobei $g_3 \neq 0$ und $g_2 = -g_1 - g_3$.

Deshalb hat $f(g_3 X' : g_3 Y' : -g_1 X' - g_2 Y')$ in $X' - Y' = 0$

eine doppelte Nullstelle.

P_3 ist genau dann Wendepunkt, wenn dies eine dreifache Nullstelle ist, also die zweite Ableitung dort verschwindet.

$$\begin{aligned} f(g_3 X' : g_3 Y' : -g_1 X' - g_2 Y') = \\ = (a_{004} g_1^4 - a_{103} g_1^3 g_3) X'^4 + \\ + (4a_{004} g_1^3 g_2 - 3a_{103} g_1^2 g_2 g_3 - a_{013} g_1^3 g_3 + a_{112} g_1^2 g_3^2 - \\ - a_{211} g_1 g_3^3 + a_{310} g_3^4) X'^3 Y' + \\ + (6a_{004} g_1^2 g_2^2 - 3a_{103} g_1 g_2^2 g_3 - 3a_{013} g_1^2 g_2 g_3 + 2a_{112} g_1 g_2 g_3^2 - \\ - a_{211} g_2 g_3^3 - a_{121} g_1 g_3^3 + a_{220} g_3^4) X'^2 Y'^2 + \dots, \end{aligned}$$

deswegen muß gelten

$$\begin{aligned} g_3^2 \left[(6a_{004} + 3a_{103} + 3a_{013} + a_{112}) g_1^2 + \right. \\ + (-3a_{103} - 2a_{112} - 2a_{211} - a_{121}) g_1 g_3 + \\ \left. + (a_{211} + 3a_{310} + a_{220}) g_3^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

Wir hatten $g_3 \neq 0$ vorausgesetzt, daher gilt:

$$(6a_{004} + 3a_{103} + 3a_{013} + a_{112})g_1^2 + \\ + (-3a_{103} - 2a_{112} - 2a_{211} - a_{121})g_1g_3 + \\ + (a_{211} + 3a_{310} + a_{220})g_3^2 = 0,$$

wobei $g_1 = a_{103} + a_{112} + 2a_{211} + a_{121} + 3a_{310} + 2a_{220} + a_{130}$

$$g_3 = 4a_{004} + 3a_{103} + 3a_{013} + 2a_{112} + a_{211} + a_{121} \neq 0.$$

(Diese Bedingung würden wir genauso erhalten, wenn wir nicht $g_3 \neq 0$, sondern $g_1 \neq 0$ oder $g_2 \neq 0$ voraussetzen und entsprechend verfahren)

Wir setzen

$$\begin{aligned} a_{004} &= a_4 \\ a_{103} &= a_5 + a_6 \\ a_{013} &= a_5 - a_6 \\ a_{112} &= a_3 - 4a_4 - 6a_5 \\ a_{211} &= a_0 + a_2 - a_3 + 2a_4 + 3a_5 - 3a_6 \\ a_{121} &= a_0 - a_2 - a_3 + 2a_4 + 3a_5 + 3a_6 \\ a_{310} &= a_0 + 4a_1 - a_2 - a_4 - a_5 + a_6 + a_7 \\ a_{220} &= a_8 \\ a_{130} &= a_0 + 2a_1 - a_4 - a_5 - a_6 + a_7 \end{aligned}$$

(eine umkehrbar eindeutige Ersetzung der Variablen).

Dann ist $g_1 = 7a_0 + 14a_1 - 2a_2 - 2a_3 - 2a_4 + 4a_7 + 2a_8$

$$g_3 = 2a_0 \neq 0$$

und die obigen beiden Gleichungen lauten:

$$0 = 4a_0 + 6a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + 2a_7 + a_8$$

$$\text{also } a_8 = -4a_0 - 6a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 2a_7 \quad \text{und}$$

$$0 = (a_3 + 2a_4)(-a_0 + 2a_1)^2 + (-3a_0 - a_2 + a_3 + 2a_4)(-a_0 + 2a_1)2a_0 + \\ + (6a_1 - a_2 + a_7)(2a_0)^2 =$$

$$= 6a_0^3 + 12a_0^2a_1 - 2a_0^2a_2 - a_0^2a_3 - 2a_0^2a_4 + 4a_0^2a_7 - \\ - 4a_0a_1a_2 + 4a_1^2a_3 + 8a_1^2a_4,$$

$$\text{also } a_7 = -\frac{3}{2}a_0 - 3a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{2}a_4 + \frac{a_1}{a_0}a_2 - \frac{a_1^2}{2a_0}a_3 - 2\frac{a_1^2}{a_0}a_4.$$

Jede nichtsinguläre Quartik ist zu so einer Quartik isomorph. Sie ist - entsprechend der Wahlmöglichkeiten für die Wendepunkte P_1, P_2, P_3 - höchstens zu endlich vielen solchen Quartiken isomorph.

Es gibt nichtsinguläre Quartiken ohne Flachpunkt (z.B. die bekannte Klein'sche Kurve

$$\{X^3Y + Y^3Z + Z^3X = 0\},$$

oder aus dem Satz von Rauch in 1.1).

Definition: Sei $Q_0(a_0 : \dots : a_6)$ diejenige Quartik,

die durch ein Polynom $\sum_{i+j+k=4} a_{ijk} x^i y^j z^k$

gegeben wird mit den Koeffizienten

$$a_{004} = a_4$$

$$a_{103} = a_5 + a_6$$

$$a_{013} = a_5 - a_6$$

$$a_{112} = a_3 - 4a_4 - 6a_5$$

$$a_{211} = a_0 + a_2 - a_3 + 2a_4 + 3a_5 - 3a_6$$

$$a_{121} = a_0 - a_2 - a_3 + 2a_4 + 3a_5 + 3a_6$$

$$a_{310} = -\frac{1}{2}a_0 + a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_3 - \frac{1}{2}a_4 - a_5 + a_6 + \frac{a_1}{a_0}a_2 - \frac{a_1^2}{a_0}a_3 - 2\frac{a_1^2}{a_0}a_4$$

$$a_{220} = -a_0 + \frac{1}{2}a_3 - 2\frac{a_1}{a_0}a_2 + 2\frac{a_1^2}{a_0}a_3 + 4\frac{a_1^2}{a_0}a_4$$

$$a_{130} = -\frac{1}{2}a_0 - a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_3 - \frac{1}{2}a_4 - a_5 - a_6 + \frac{a_1}{a_0}a_2 - \frac{a_1^2}{a_0}a_3 - 2\frac{a_1^2}{a_0}a_4$$

alle anderen Koeffizienten sind 0.

Sei ferner

$$M_{0.1} = \{p \in \mathbb{P}^6 \mid p = (a_0 : a_1 : \dots : a_6) \text{ mit } a_0 \neq 0 \text{ und} \\ Q_{0.1}(p) \text{ nicht singular}\},$$

$$n'(0.1) = 0, \quad G_{0.1} = 1.$$

Es gibt natürlich hier keine geometrische Bedingung.

2.1

2.1.1 Quartiken mit einem Flachpunkt

Wir untersuchen nichtsinguläre Quartiken mit mindestens einem Flachpunkt.

Sei P_1 dieser Flachpunkt.

Wir fahren mit den gleichen Bezeichnungen und der gleichen Argumentation wie in 2.0.1 fort und geben nur die Unterschiede zu dort an.

Wir erhalten eine isomorphe Quartik $Q_{0.1}(p)$,

da P_1 Flachpunkt ist, ist $a_{103} = 0$, also $a_6 = -a_5$.

Definition: Sei $Q_{1.1}(a_0 : \dots : a_5) = Q_{0.1}(a_0 : \dots : a_5 : -a_5)$,

$$M_{1.1} = \left\{ p \in \mathbb{P}^5 \mid \begin{array}{l} p = (a_0 : \dots : a_5) \text{ mit } a_0 \neq 0, \\ Q_{1.1}(p) \text{ nicht singulär} \end{array} \right\}$$

$$n'(1.1) = 1, \quad G_{1.1} = 1.$$

Es gibt nichtsinguläre Quartiken mit genau einem Flachpunkt, siehe z.B. bei [Kuribayashi und Komiya] oder den Satz von Rauch in 1.1.

Die einzige geometrische Bedingung ist die Existenz eines Flachpunktes.

2.2

2.2.1 Quartiken mit zwei Flachpunkten

Sei P_1 ein Flachpunkt, P_2 ein zweiter.

Da Flachpunkte vierfache Schnittpunkte ihrer Tangente mit der Quartik sind, liegen auf Flachtangenten keine weiteren Punkte der Quartik.

P_1 und P_2 erfüllen daher die Bedingungen von 2.0.1. Wir erhalten also eine isomorphe Quartik $Q_{1,1}(p)$ - da ja P_1 Flachpunkt ist - mit der zusätzlichen Eigenschaft $a_{013} = 0$, also $a_5 = 0$.

Definition: Sei $Q_{2,1}(a_0 : \dots : a_4) = Q_{1,1}(a_0 : \dots : a_4 : 0)$, also die Quartik $\{f = 0\}$ mit

$$f = a_{004}Z^4 + a_{112}XYZ^2 + a_{211}X^2YZ + a_{121}XY^2Z + \\ + a_{310}X^3Y + a_{220}X^2Y^2 + a_{130}XY^3, \text{ wobei}$$

$$a_{004} = a_4$$

$$a_{112} = a_3 - 4a_4$$

$$a_{211} = a_0 + a_2 - a_3 + 2a_4$$

$$a_{121} = a_0 - a_2 - a_3 + 2a_4$$

$$a_{310} = -\frac{1}{2}a_0 + a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_3 - \frac{1}{2}a_4 + \frac{a_1}{a_0}a_2 - \frac{a_1^2}{a_0^2}a_3 - 2\frac{a_1^2}{a_0^2}a_4$$

$$a_{220} = -a_0 + \frac{1}{2}a_3 - 2\frac{a_1}{a_0}a_2 + 2\frac{a_1^2}{a_0^2}a_3 + a\frac{a_1^2}{a_0^2}a_4$$

$$a_{130} = -\frac{1}{2}a_0 - a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_3 - \frac{1}{2}a_4 + \frac{a_1}{a_0}a_2 - \frac{a_1^2}{a_0^2}a_3 - 2\frac{a_1^2}{a_0^2}a_4.$$

Sei $M_{2,1} = \{p \in \mathbb{P}^4 \mid a_0 \neq 0, Q_{2,1}(p) \text{ nicht singular}\}$

$$n'(2.1) = 2, G_{2,1} = 1.$$

$\{Z^4 + XYZ^2 + X^3Y + XY^3 = 0\}$ ist eine nichtsinguläre Quartik mit genau 2 Flachpunkten, daher gibt es $p \in M_{2,1}$, sodaß $Q_{2,1}(p)$ genau 2 Flachpunkte besitzt.

2.3 Quartiken mit drei Flachpunkten

Seien P_1, P_2, P_3 drei Flachpunkte.

Nach 1.5 ist dann

$$(P_1 P_2 P_3)^4 = 1.$$

Wir erhalten die Lagetableaus

$$T_{3.1} = (1), \quad T_{3.2} = (-1), \quad T_{3.3} = (i),$$

denn wenn $(P_1 P_2 P_3) = -i$, so erreichen wir durch

die Umbenennung $P'_1 = P_2, P'_2 = P_1, P'_3 = P_3$:

$$(P'_1 P'_2 P'_3) = i.$$

2.3.1 $T_{3.1} = (1)$

Wie in 2.2.1 erhalten wir eine isomorphe Quartik

$$Q_{2.1}(p).$$

In 1.4 haben wir abgeleitet, daß auf $\{Z=0\}$ genau dann ein dritter Flachpunkt liegt, wenn

$$a_{310} a_{121}^2 - a_{220} a_{211} a_{121} + a_{130} a_{211}^2 + a_{112} (a_{220}^2 - 4a_{310} a_{130}) = 0$$

oder in den anderen Variablen:

$$a_0^2 + 8a_1^2 + (4a_1 + a_2 - 2\frac{a_1}{a_0} a_3)^2 + (a_3 - 4a_0) \left(1 + 8\frac{a_1}{a_0}\right) a_4 = 0$$

Definition:

Sei $M_{3.1} = \left\{ (a_0 : \dots : a_4) \in \mathbb{P}^4 \mid a_0 \neq 0, (a_0 : \dots : a_4) \text{ genügt} \right.$
 obiger Gleichung und
 $\left. Q_{2.1}(a_0 : \dots : a_4) \text{ ist nicht singulär} \right\},$

$$Q_{3.1}(p) = Q_{2.1}(p) \text{ für } p \in M_{3.1}.$$

$$n'(3.1) = 4, \quad G_{3.1} = 1.$$

$M_{3,1}$ liegt in der dreidimensionalen Varietät

$$\{(a_0 : \dots : a_4) \in \mathbb{P}^4 \mid a_0^4 + 8a_0^2a_1^2 + (4a_0a_1 + a_0a_2 - 2a_1a_3)^2 + (a_3 - 4a_0)(a_0^2 + 8a_1^2) = 0\}.$$

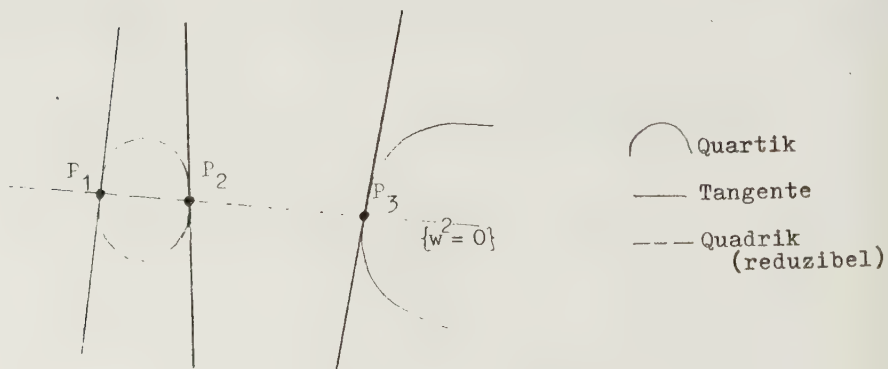
Wir zeigten in 1.5, daß jede solche Quartik einen vierten Flachpunkt besitzt.

$Q_{3,1}(2:1:0:4:1) = \{Z^4 - X^3Y + 3X^2Y^2 - 3XY^3 = 0\}$ hat genau 4 Flachpunkte.

Genau dann ist eine Quartik isomorph zu einer $Q_{3,1}(p)$, wenn sie drei Flachpunkte besitzt, die auf einer Geraden liegen.

Bemerkung: Liegen drei Flachpunkte auf einer Geraden $\{w=0\}$, so ist $\{w^2=0\}$ die eindeutig bestimmte Quadrik mit drei doppelten Schnittpunkten P_1, P_2, P_3 mit der Quartik, sie ist reduzibel.

Existiert umgekehrt so eine reduzible Quadrik, so ist sie eine Doppelgerade (denn zwei verschiedene Geraden können nicht in drei Punkten doppelt schneiden) und P_1, P_2, P_3 liegen auf ihr.



$$\left. \begin{array}{l} 2.3.2 \quad \underline{T_{3.2} = (-1)} \\ 2.3.3 \quad \underline{T_{3.3} = (1)} \end{array} \right\} (P_1 P_2 P_3) = e$$

P_3 liegt nicht auf der Geraden $\overline{P_1 P_2}$.

Ginge die Tangente von P_3 durch den Schnittpunkt der Tangenten von P_1 und P_2 , so wäre nach 1.5 $(P_1 P_2 P_3) = 1$.

Wir erhalten dann eine isomorphe Quartik $Q_{2,1}(p)$ mit Flachpunkt $(1:1:1)$.

Die Tangente dort wird einerseits durch eine lineare Form $(3a_{310} + 2a_{220} + a_{130} + 2a_{211} + a_{121} + a_{112})X +$
 $+(a_{310} + 2a_{220} + 3a_{130} + a_{211} + 2a_{121} + a_{112})Y +$
 $+(a_{211} + a_{121} + 2a_{112} + 4a_{004})Z =$
 $= (-a_0 + 2a_1)X + (-a_0 - 2a_1)Y + 2a_0Z$

und andererseits durch $\frac{e}{1-e}X - \frac{1}{1-e}Y + Z$ gegeben.

Daher ist $-a_0 + 2a_1 = 2a_0 \frac{e}{1-e}$, $a_1 = \frac{1}{2} \frac{1+e}{1-e} a_0$, also

$$a_{004} = a_4$$

$$a_{112} = a_3 - 4a_4$$

$$a_{211} = a_0 + a_2 - a_3 + 2a_4$$

$$a_{121} = a_0 - a_2 - a_3 + 2a_4$$

$$a_{310} = \frac{e}{1-e}a_0 + \frac{e}{1-e}a_2 - \frac{e}{(1-e)^2}a_3 - \frac{1+e^2}{(1-e)^2}a_4$$

$$a_{220} = -a_0 - \frac{1+e}{1-e}a_2 + \frac{1+e^2}{(1-e)^2}a_3 + \frac{e^2+2e+1}{(1-e)^2}a_4$$

$$a_{130} = -\frac{1}{1-e}a_0 + \frac{1}{1-e}a_2 - \frac{e}{(1-e)^2}a_3 - \frac{1+e^2}{(1-e)^2}a_4.$$

Diese Gleichungen sind linear in den a_i , wir können

daher vermittelt

$$a_4 = a_{004}$$

$$a_3 = a_{112} + 4a_{004}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}a_{211} - \frac{1}{2}a_{121}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}a_{211} + \frac{1}{2}a_{121} + a_{112} + 2a_{004}$$

zu den Koeffizienten als Variablen zurückgehen
und erhalten dann

$$a_{310} = \frac{e}{1-e}a_{211} - \frac{e^2}{(1-e)^2}a_{112} - \frac{1+2e+3e^2}{(1-e)^2}a_{004}$$

$$a_{220} = -\frac{1}{1-e}a_{211} + \frac{e}{1-e}a_{121} + \frac{2e}{(1-e)^2}a_{112} + \frac{3(1+e)^2}{(1-e)^2}a_{004}$$

$$a_{130} = -\frac{1}{1-e}a_{121} - \frac{1}{(1-e)^2}a_{112} - \frac{3+2e+e^2}{(1-e)^2}a_{004}$$

Definition: Sei $Q_{3,2}(a_{004}:a_{112}:a_{211}:a_{121})$ die Quartik

$$\{a_{004}Z^4 + a_{112}XYZ^2 + a_{211}X^2YZ + a_{121}XY^2Z + a_{310}X^3Y + a_{220}X^2Y^2 + \\ + a_{130}XY^3 = 0\} \text{ mit}$$

$$a_{310} = -\frac{1}{2}a_{211} - \frac{1}{4}a_{112} - \frac{1}{2}a_{004}$$

$$a_{220} = -\frac{1}{2}a_{211} - \frac{1}{2}a_{121} - \frac{1}{2}a_{112}$$

$$a_{130} = -\frac{1}{2}a_{121} - \frac{1}{4}a_{112} - \frac{1}{2}a_{004} \quad (e = -1)$$

und $Q_{3,3}(a_{004}:a_{112}:a_{211}:a_{121})$ die Quartik mit

$$a_{310} = (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})a_{211} + \frac{i}{2}a_{112} + (1+i)a_{004}$$

$$a_{220} = (-\frac{1}{2} - \frac{i}{2})a_{211} + (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})a_{121} - a_{112} - 3a_{004}$$

$$a_{130} = (-\frac{1}{2} - \frac{i}{2})a_{121} - \frac{i}{2}a_{112} + (1-i)a_{004} \quad (e = i)$$

Sei ferner

$$M_{3.2} = \{p \in \mathbb{P}^3 \mid Q_{3.2}(p) \text{ nicht singular}\}$$

$$M_{3.3} = \{p \in \mathbb{P}^3 \mid Q_{3.3}(p) \text{ nicht singular}\}$$

$$G_{3.2} = G_{3.3} = 1, \quad n'(3.2) = n'(3.3) = 1.$$

Jede solche Quartik hat 3 Flachpunkte

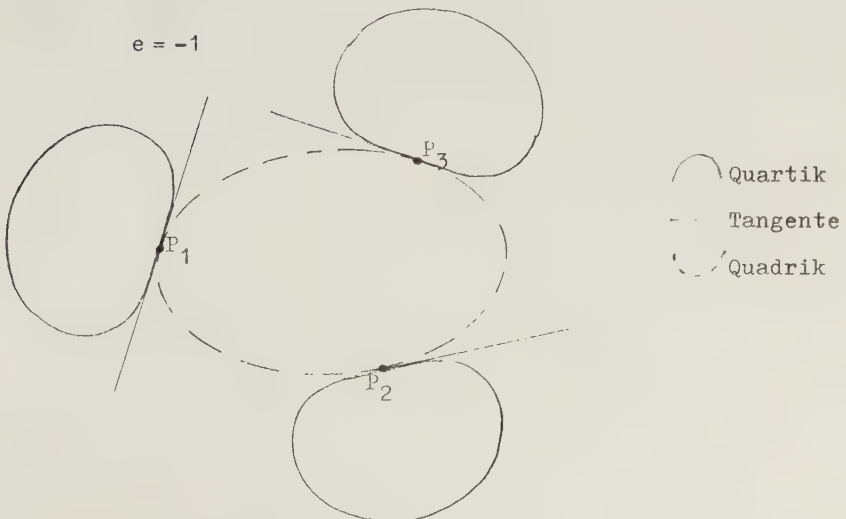
$$P_1 = (1:0:0), \quad P_2 = (0:1:0), \quad P_3 = (1:1:1).$$

$$\{2Z^4 + 2X^2YZ - 2X^3Y - X^2Y^2 - XY^3 = 0\} \quad \text{und}$$

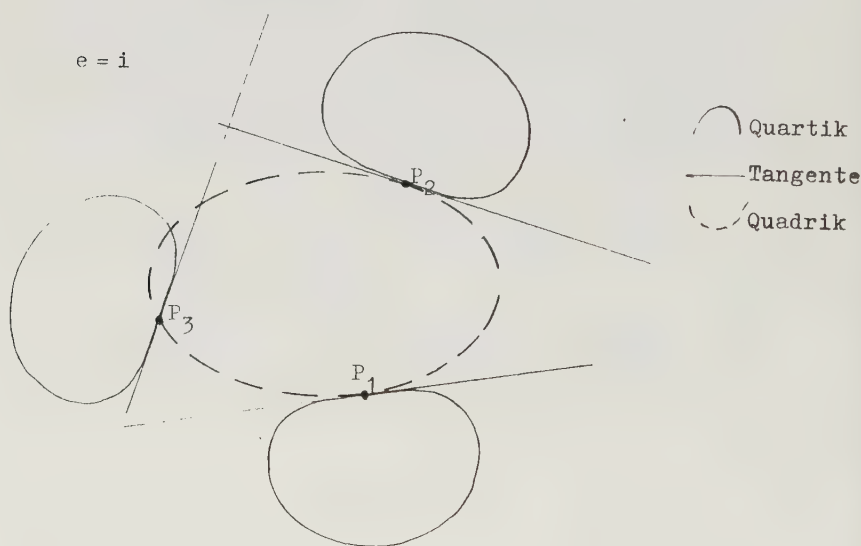
$\{2Z^4 + 2X^2YZ + 2XY^2Z + 2iX^3Y - 5X^2Y^2 - 2iXY^3 = 0\}$ sind Quartiken aus den beiden Scharen mit genau drei Flachpunkten.

Eine Quartik gehört genau dann zur Familie 3.2, wenn es eine irreduzible Quadrik gibt, die in den Flachpunkten P_1, P_2, P_3 doppelte Schnittpunkte mit der Quartik hat.

(Im obigen Fall tut das $\{XY - Z^2 = 0\}$; gibt es umgekehrt so eine Quadrik, so sind P_1, P_2, P_3 nicht kollinear und man berechnet $(P_1P_2P_3) = -1$)



Eine Quartik gehört genau dann zur Familie 3.3, wenn es eine Quadrik gibt, die in zwei Flachpunkten doppelt und in einem dritten einfach schneidet. (Wieder tut $\{XY - Z^2 = 0\}$ das; gibt es eine solche Quadrik, so sind die drei Flachpunkte nicht kollinear und außerdem $(P_1 P_2 P_3) \neq -1$. Nach 2.3 folgt die Behauptung.)



2.4 Quartiken mit 4 Flachpunkten

Seien P_1, P_2, P_3, P_4 Flachpunkte einer nichtsingulären Quartik.

Kommt der Wert 1 im Lagetableau zweimal vor, so liegen alle auf einer Geraden und das Lagetableau ist $(1, 1, 1, 1) = T_{4.1}$ (siehe 2.4.1).

Kommt der Wert 1 überhaupt im Lagetableau vor, so gibt es vier Flachpunkte P_1', P_2', P_3', P_4' mit obigem Lagetableau.

Nimmt die Tripelfunktion nie den Wert 1, jedoch den Wert -1 an, so nehmen wir oBdA $(P_1 P_2 P_3) = -1$ an. Nach der Tabelle in 1.6 gibt es -1 im Lagetableau nur paarweise, durch eventuelle Umbenennung von P_1, P_2, P_3 können wir $(P_1 P_2 P_4) = -1$ erreichen.

Dann gilt $(P_1 P_3 P_4) = (P_2 P_3 P_4) = -1$ (siehe 2.4.2)
 $= i$ (siehe 2.4.3)

oder $= -i$, hier können wir

durch $P_1' = P_1, P_2' = P_2, P_3' = P_4, P_4' = P_3$ das Lagetableau $T_{4.3}$ erreichen.

Kommt weder der Wert 1 noch -1 im Lagetableau vor, so wählen wir P_1, P_2, P_3 so, daß $(P_1 P_2 P_3) = i$.

Ist dann $(P_1 P_2 P_4) = i$, so ist $(P_2 P_3 P_4) = -i$ oder

$$(P_3 P_1 P_4) = (P_1 P_3 P_4)^{-1} = -i.$$

Durch eine zyklische Vertauschung von P_1, P_2, P_3 bleibt $(P_1' P_2' P_3') = i$ erhalten, aber wir bekommen $(P_1' P_2' P_4') = -i$.

Deshalb können wir diese Situation annehmen,

dann gilt $(P_2 P_3 P_4) = -(P_1 P_3 P_4) = i$ (siehe 2.4.4)

oder $= -i$ (siehe 2.4.5).

Die Zahl der Werte 1 und -1 bleibt bei jeder Permutation der Flachpunkte ungeändert, deshalb können

$T_{4.1}$, $T_{4.2}$, $T_{4.3}$ und $T_{4.4}$ (bzw $T_{4.5}$) nicht ineinander übergeführt werden.

Jede gerade Permutation ist ein Lagemorphismus von $T_{4.5}$, jede ungerade führt $T_{4.5}$ in $(-1,1,-1,1)$ über, also nie nach $T_{4.4}$.

2.4.1 $T_{4.1} = (1, 1, 1, 1)$

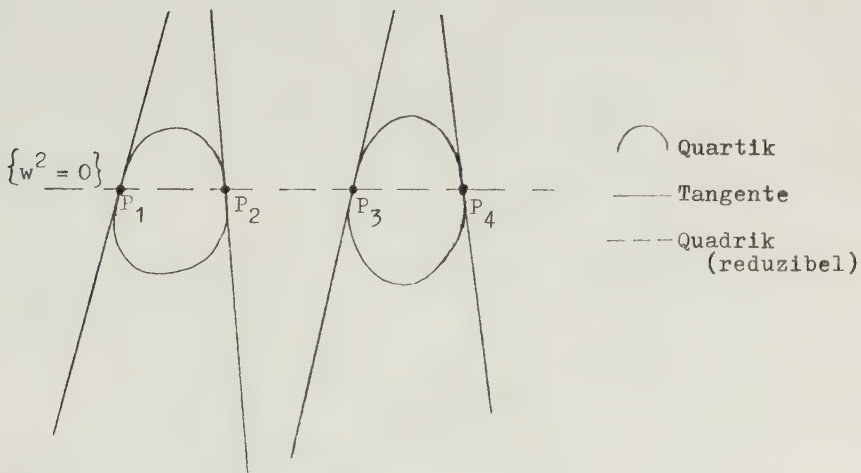
Jede nichtsinguläre Quartik mit diesem Lagetauleau ist isomorph zu einer Quartik $Q_{3.1}(p)$, $p \in M_{3.1}$, jede Quartik $Q_{3.1}(p)$ hat vier Flachpunkte mit Lagetauleau $T_{4.1}$.

Definition: $Q_{4.1}(p) = Q_{3.1}(p)$, $M_{4.1} = M_{3.1}$,
 $G_{4.1} = 1$, $n'(4.1) = 4$.

$$Q_{4.1}(2:1:0:4:1) = \{Z^4 - X^3Y + 3X^2Y^2 - 3XY^3 = 0\}$$

ist nicht singulär und besitzt genau vier Flachpunkte.

Genau dann ist eine Quartik eine Quartik dieser Familie, wenn sie vier Flachpunkte besitzt, die kollinear sind (oder es eine reduzible Quadrik gibt, die die Quartik in den vier Flachpunkten doppelt schneidet).



$$2.4.2 \quad \underline{T_{4.2} = (-1, -1, -1, -1)}$$

Wegen $(P_1 P_2 P_3) = -1$ erhalten wir eine isomorphe Quartik $Q_{3.2}(p)$, $p \in M_{3.2}$.

Nach 1.6 ist $P_4 = (p: \frac{1}{p}: 1)$, $p \neq 0, 1$.

Wir setzen $X = pX'$, $Y = \frac{1}{p}Y'$, $Z = Z'$.

Dann ist $P_1' = (1:0:0)$, $P_2' = (0:1:0)$, $P_4' = (1:1:1)$,

$w_1' = Y'$, $w_2' = X'$, also

$$a_{310}' = -\frac{1}{2}a_{211}' - \frac{1}{4}a_{112}' - \frac{1}{2}a_{004}'$$

$$a_{220}' = -\frac{1}{2}a_{211}' - \frac{1}{2}a_{121}' - \frac{1}{2}a_{112}'$$

$$a_{130}' = -\frac{1}{2}a_{121}' - \frac{1}{4}a_{112}' - \frac{1}{2}a_{004}', \quad \text{wobei}$$

$$a_{004}' = a_{004}, \quad a_{112}' = a_{112}, \quad a_{211}' = pa_{211}, \quad a_{121}' = \frac{1}{p}a_{121},$$

$$a_{310}' = p^2 a_{310}, \quad a_{220}' = a_{220}, \quad a_{130}' = \frac{1}{p^2} a_{130}.$$

Folglich ist

$$0 = p^2 a_{310}' - p^2 a_{310} = -\frac{p^2}{2}a_{211}' - \frac{p^2}{4}a_{112}' - \frac{p^2}{2}a_{004}' + \frac{1}{2}pa_{211} + \frac{1}{4}a_{112} + \frac{1}{2}a_{004},$$

$$\text{also } a_{211} = -\frac{p+1}{2p}a_{112} - \frac{p+1}{p}a_{004}$$

und analog aus den beiden Gleichungen für a_{130}

$$a_{121} = -\frac{p+1}{2}a_{112} - (p+1)a_{004}.$$

Die beiden Gleichungen für a_{220} stimmen dann automatisch überein, denn die Summe aller Koeffizienten verschwindet.

$$\text{Weiter ist } a_{310} = \frac{1}{4p}a_{112} + \frac{1}{2p}a_{004},$$

$$a_{220} = \frac{p^2+1}{4p}a_{112} + \frac{(p+1)^2}{2p}a_{004},$$

$$a_{130} = \frac{p}{4}a_{112} + \frac{p}{2}a_{004}.$$

Jede solche Quartik läßt Automorphismen

$$\begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ \frac{1}{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & p^2 & -2p \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & p & -p-1 \end{pmatrix} \quad \text{zu (einfache Rechnung).}$$

Sie erzeugen auf den Flachpunkten die Permutationen

$$[P_1 P_2][P_3 P_4] \quad \text{und} \quad [P_1 P_3][P_2 P_4].$$

Die davon erzeugte Automorphismengruppe ist isomorph

zur Klein'schen Vierergruppe $V_4 \cong \langle S, T \mid S^2 = T^2 = 1, ST = TS \rangle$.

Definition: Sei $Q_{4.2}(a_{004}:a_{112}, p) = Q_{3.2}(a_{004}:a_{112}:a_{211}:a_{121})$

$$\text{mit } a_{211} = -\frac{p+1}{2p}a_{112} - \frac{p+1}{p}a_{004},$$

$$a_{121} = -\frac{p+1}{2}a_{112} - (p+1)a_{004} \quad \text{für } (a_{004}:a_{112}) \in \mathbb{P}^1, p \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

$$M_{4.2} = \left\{ (a_{004}:a_{112}, p) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \mid \begin{array}{l} Q_{4.2}(a_{004}:a_{112}, p) \\ \text{nicht singulär} \end{array} \right\}$$

$$G_{4.2} = V_4,$$

$$n^*(4.2) = 4.$$

Jede Quartik $Q_{4.2}(a_{004}:a_{112}, p)$ hat vier Flachpunkte

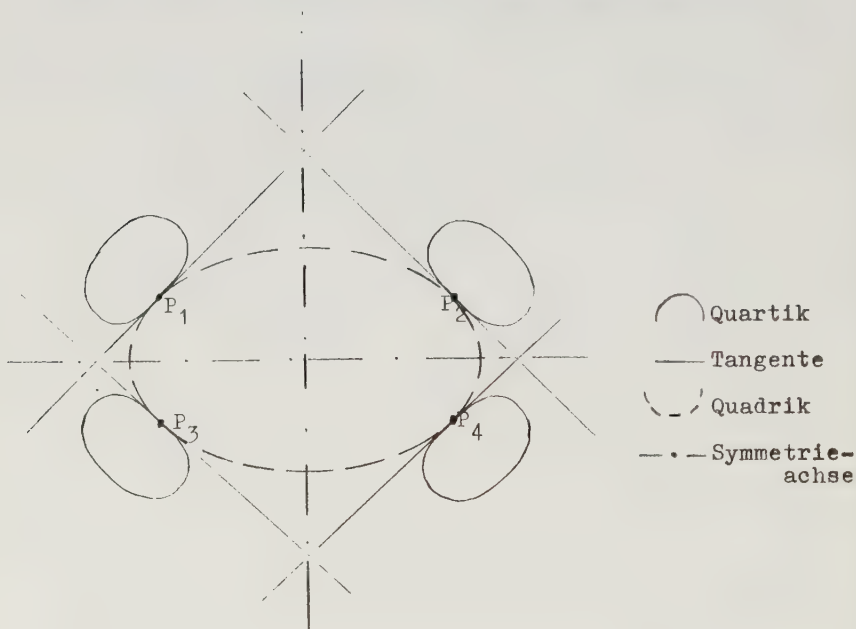
$$P_1 = (1:0:0), P_2 = (0:1:0), P_3 = (1:1:1), P_4 = (p:\frac{1}{p}:1).$$

$$Q_{4.2}(2:-8,-1) = \{2Z^4 - 8XYZ^2 + X^3Y + 4X^2Y^2 + XY^3 = 0\} \text{ ist}$$

nichtsingulär und hat genau vier Flachpunkte.

Genau dann ist eine Quartik von dieser Art, wenn es eine irreduzible Quadrik gibt, die die Quartik in vier Flachpunkten doppelt schneidet ("tangentengleiche Quadrik").

Die Quadrik $\{XY - Z^2 = 0\}$ tut das nämlich im obigen Fall und umgekehrt ist die Existenz einer solchen Quadrik nach 2.3.2 hinreichend für obiges Lagetableau.



2.4.3 $T_{4.3} = (-1, -1, i, i)$

Analog zu 2.4.2 erhalten wir eine isomorphe Quartik $Q_{3.2}(a_{004}:a_{112}:a_{211}:a_{121})$.

Nach 1.6 ist dann $P_4 = (p:q:1)$ mit

$$q = \frac{(\frac{1}{2} - \frac{i}{2})p + i}{p - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}} = (\frac{1}{2} - \frac{i}{2}) \frac{p - 1 + i}{p - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}}, \quad p \neq \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

Hieraus folgen wie in 2.4.2 die Beziehungen

$$\begin{aligned} a_{310} &= -\frac{1}{2}a_{211} - \frac{1}{4}a_{112} - \frac{1}{2}a_{004} = \\ &= -\frac{1}{2p}a_{211} - \frac{1}{4p^2}a_{112} - \frac{1}{2p^3q}a_{004} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{130} &= -\frac{1}{2}a_{121} - \frac{1}{4}a_{112} - \frac{1}{2}a_{004} = \\ &= -\frac{1}{2q}a_{121} - \frac{1}{4q^2}a_{112} - \frac{1}{2pq^3}a_{004} \quad \text{und daraus} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{211} &= -\frac{p+1}{2p}a_{112} - \frac{p^3 - q - 1}{p^2(p-1)}a_{004} = \\ &= (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2p})a_{112} + (-1 - \frac{1}{2p} - \frac{1}{2(p-1+i)} + \frac{-1-i}{2p^2})a_{004}, \end{aligned}$$

und genauso

$$\begin{aligned} a_{121} &= (-1 - \frac{i}{2} - \frac{1}{2(p-1+i)})a_{112} + (-i + \frac{-1-4i}{2(p-1+i)} - \\ &\quad - \frac{1}{2p} + \frac{-1-i}{2(p-1+i)^2})a_{004}. \end{aligned}$$

Definition: Sei

$$Q_{4.3}(a_{004}:a_{112}, p) = Q_{3.2}(a_{004}:a_{112}:a_{211}:a_{121}) \text{ mit}$$

a_{211} und a_{121} wie oben berechnet,

$$M_{4.3} = \left\{ (a_{004}:a_{112}, p) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C} \setminus [0, 1-i] \mid \right. \\ \left. Q_{4.3}(a_{004}:a_{112}, p) \text{ nicht singular} \right\},$$

$$G_{4.3} = 1, \quad n'(4.3) = 4.$$

Eine solche Quartik hat dann Flachpunkte

$$P_1 = (1:0:0), \quad P_2 = (0:1:0), \quad P_3 = (1:1:1),$$

$$P_4 = \left(p : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{p-1+\frac{1}{2}}{p-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} : 1 \right).$$

Die Quartik $Q_{4.3}(9:-6, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}) =$

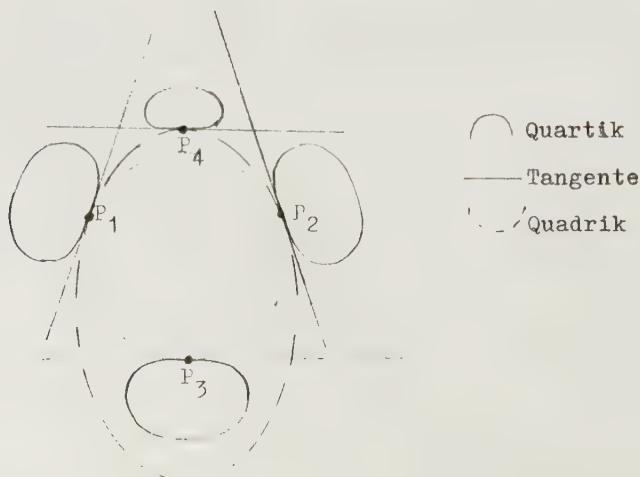
$$= \left\{ 9Z^4 - 6XYZ^2 + (6-6i)X^2YZ + (6+4i)XY^2Z + \right. \\ \left. + (-6+3i)X^3Y + (-3+1)X^2Y^2 + (-6-2i)XY^3 = 0 \right\}$$

ist nichtsingulär und hat genau 4 Flachpunkte.

Eine Quartik wie beschrieben liegt genau dann vor, wenn es eine Quadrik gibt, die in drei Flachpunkten doppelte Schnittpunkte mit der Quartik hat und durch keinen vierten Flachpunkt geht.

Wieder erfüllt $\{XY - Z^2 = 0\}$ diese Bedingung.

Gibt es so eine Quadrik und ist sie reduzibel, so ist sie eine Doppelgerade und schneidet einen vierten Flachpunkt aus. Ist sie irreduzibel, so liegt nicht der Fall von 4.2 vor, denn dort schneidet jede "tangente-gleiche Quadrik" auch im vierten Flachpunkt. Da jedoch $(P_i P_j P_k) = -1$ vorkommt, gehört die Quartik nach 2.4 zu dieser Familie.



$$2.4.4 \quad \underline{T_{4.4} = (i, -i, -i, i)}$$

Wegen $(P_1 P_2 P_3) = i$ erhalten wir eine isomorphe Quartik $Q_{3.3}(a_{004}:a_{112}:a_{211}:a_{121})$.

Nach 1.6 ist $P_4 = (p:q:1)$ mit $q = \frac{1}{p}$, $p \neq 0$

Analog zu 2.4.2 berechnen wir ($p \neq i$, sonst $a_{004} = 0$)

$$a_{211} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2} - \frac{1+i}{2p}\right)a_{112} + \left(2i - \frac{2i}{p} + \frac{-2+2i}{p-1}\right)a_{004}$$

$$a_{121} = \left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)p - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)a_{112} + (2ip - 2 + \frac{-2-2i}{p-1})a_{004}$$

Wie man leicht nachprüft, läßt diese Quartik den

Automorphismus $\begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ \frac{1}{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ zu, hat also eine

zyklische Automorphismengruppe $\cong C_2$.

Definition: Sei $Q_{4.4}(a_{004}:a_{112}, p) =$

$$= Q_{3.3}(a_{004}:a_{112}:a_{211}:a_{121}) \text{ mit}$$

a_{211}, a_{121} wie oben berechnet.

Sei $M_{4.4} = \{(a_{004}:a_{112}, p) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C} \setminus \{0, i\} \mid$

$Q_{4.4}(a_{004}:a_{112}, p) \text{ nicht singular}\}$,

$$G_{4.4} = C_2,$$

$$n'(4.4) = 4.$$

Eine solche Quartik hat dann Flachpunkte

$$P_1 = (1:0:0), \quad P_2 = (0:1:0), \quad P_3 = (1:1:1), \quad P_4 = (p:\frac{1}{p}:1).$$

Obiger Automorphismus induziert auf den Flachpunkten die Permutation $[P_1 P_2][P_3 P_4]$.

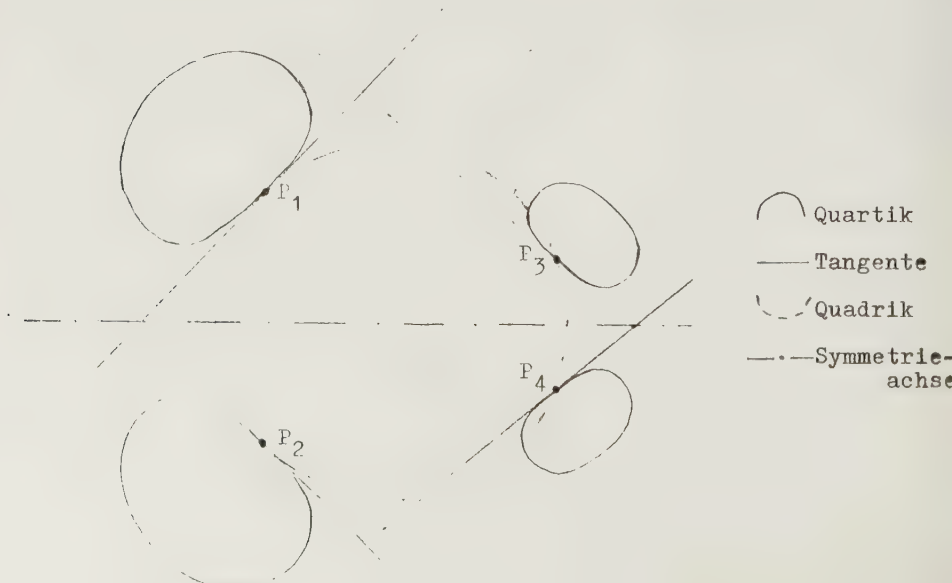
Die nichtsinguläre Quartik $Q_{4.4}(1:0, -i) = \{Z^4 + (1+i)X^2YZ + (1-i)XY^2Z + iX^3Y - 3X^2Y^2 - iXY^3 = 0\}$ hat genau vier

Flachpunkte.

Genau dann gehört eine Quartik zu dieser Familie, wenn sie vier Flachpunkte hat, sodaß alle Quadriken, die in zwei Flachpunkten doppelt schneiden und durch einen dritten hindurchgehen dort nur einfach schneiden, und daß es eine solche Quadrik gibt, die durch alle vier Flachpunkte geht.

Nach 2.3.3 folgt das nämlich aus dem Lagetableau und der Tatsache, daß die Quadrik $\{XY - Z^2 = 0\}$ obige Bedingung erfüllt.

Umgekehrt hat wieder nach 2.3.3 das Lagetableau dieser vier Flachpunkte nur die Werte 1 und -1 und wir können $(P_1 P_2 P_3) = 1$ annehmen. Weiter können wir voraussetzen, daß P_4 auf der Quadrik liegt, die in P_1 und P_2 doppelte und in P_3 einen einfachen Schnittpunkt mit der Quartik hat. Der Vergleich mit den noch möglichen vier Fällen aus 1.6 ergibt - außer in dem hier behandelten Fall - nur Widersprüche $(P_i = P_j \text{ oder } w_i(P_j) = 0)$.



$$2.4.5 \quad \underline{T_{4.5} = (1, -1, i, -i)}$$

Wir erhalten eine isomorphe Quartik $Q_{3.3}(a_{004} : \dots)$

Nach 1.6 ist $P_4 = (p : q : 1)$ mit

$$q = \frac{(1-i)p-1}{p-1-i} = (1-i) \frac{p - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}}{p-1-i}, \quad p \neq 1+i, \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, 0.$$

Analog zu 2.4.2 berechnen wir

$$\begin{aligned} a_{211} &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2} - \frac{1+i}{2p} \right) a_{112} \\ &\quad + \left(2i + \frac{-2-4i}{p} + \frac{-2+2i}{p-i} + \frac{2+2i}{p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}} + \frac{2-2i}{p^2} \right) a_{004} \\ a_{121} &= \left(-1 - \frac{i}{2} + \frac{1+i}{4(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})} \right) a_{112} + \\ &\quad + \left(-2-2i - \frac{4+4i}{p} + \frac{2+2i}{p-i} + \frac{4+i}{p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}} + \frac{-1-i}{2(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})^2} \right) a_{004} \end{aligned}$$

Definition: Sei $Q_{4.5}(a_{004} : a_{112}, p) =$

$= Q_{3.3}(a_{004} : a_{112} : a_{211} : a_{121})$ mit a_{211} und a_{121} wie oben,

$$\begin{aligned} M_{4.5} &= \{ (a_{004} : a_{112}, p) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\} \mid \\ &\quad Q_{4.5}(a_{004} : a_{112}, p) \text{ nicht singulär} \}, \end{aligned}$$

$$G_{4.5} = 1,$$

$$n'(4.5) = 4.$$

Diese Quartiken haben Flachpunkte

$$P_1 = (1:0:0), \quad P_2 = (0:1:0), \quad P_3 = (1:1:1),$$

$$P_4 = \left(p : (1-i) \frac{p - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}}{p-1-i} : 1 \right).$$

Die nichtsinguläre Quartik $Q_{4.5}(100:0,2) =$

$$\begin{aligned} &= \{ 100Z^4 + (-90+150i)X^2YZ + (-144-168i)XY^2Z + (70-20i)X^3Y + \\ &\quad + (-24-18i)X^2Y^2 + (88+56i)XY^3 = 0 \} \text{ hat genau vier} \end{aligned}$$

Flachpunkte.

Eine Quartik gehört genau dann zu dieser Familie, wenn sie vier Flachpunkte besitzt, sodaß jede Quadrik, die die Quartik in zwei Flachpunkten doppelt schneidet und durch einen dritten geht, in diesem nicht doppelt schneidet und nicht durch den vierten Flachpunkt geht.

Da nämlich 1 und -1 im Lagetableau nicht vorkommen, kann so eine Quadrik im dritten Flachpunkt nicht doppelt schneiden. Sie kann auch nicht durch alle vier Flachpunkte gehen, denn alle Quadriken durch die vier Flachpunkte haben die Gleichung

$$s(Y-Z)(X-pZ) + t(XY + (-1+i)XZ + (-1-i)YZ + Z^2) = 0 \text{ mit } (s:t) \in \mathbb{P}^1; \text{doppelte Schnittpunkte erhalten wir}$$

$$\text{in } (1:0:0) \quad \text{für } (s:t) = (-1+i; 1),$$

$$\text{in } (0:1:0) \quad \text{für } (s:t) = (-1-i; p),$$

$$\text{in } (1:1:1) \quad \text{für } (s:t) = (1-i; p-1) \text{ und}$$

$$\text{in } (p: \frac{(1-i)p-1}{p-1-i}: 1) \quad \text{für } (s:t) = ((-1+i)p^2 + (3-i)p - 1 - i; p^2 - p).$$

Sollen nun zwei Schnittpunkte doppelt sein, so müssen zwei der (s:t)-Werte übereinstimmen.

Daraus folgt jedoch

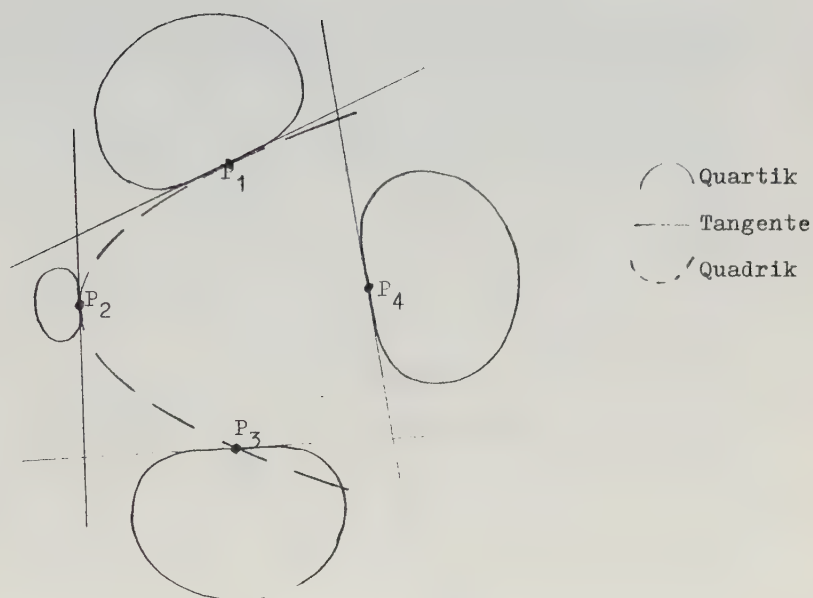
$$p = i, p = 0, p = \frac{1+i}{2}, p = \frac{1-i}{2}, p = 1+i \text{ oder } p = 1, p = i.$$

Diese Werte von p liefern jedoch alle singuläre Quartiken.

Umgekehrt folgt aus obiger Bedingung $(P_i P_j P_k) = \pm i$,

nach 2.4 gibt es nur die beiden Fälle 2.4.4 und

2.4.5. In 2.4.4 existiert jedoch eine Quadrik durch vier Flachpunkte, die in zweien tangential an die Quartik ist.



2.5 Quartiken mit 5 Flachpunkten

Seien $P_1, \dots, P_5$ verschiedene Flachpunkte einer nichtsingulären Quartik.

Kommt der Wert 1 im Lagetableau vor, so gibt es vier Flachpunkte $P_1', \dots, P_4'$, die auf einer Geraden liegen und einen Flachpunkt P_5' , der nicht auf ihr liegt.

Nach 1.5 gibt es ein $i \in \{2, 3, 4\}$ mit $(P_1' P_i' P_5') = -1$ und ein $j \neq i$, $j \in \{2, 3, 4\}$, mit $(P_1' P_j' P_5') = 1$.

OBdA ist also $P_1 \cong P_1', P_2 = P_i', P_3 = P_j', P_5 = P_5'$ und wir haben das Lagetableau

$$T_{5,1} = (1, 1, -1, 1, i, -i, 1, -i, i, -1) \text{ (siehe 2.5.1).}$$

Gibt es den Wert 1 im Lagetableau nicht, jedoch den Wert -1 , so sei $(P_1 P_2 P_3) = -1$.

Es gibt $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $(P_i P_j P_4) = -1$, oBdA sei $(P_1 P_2 P_4) = -1$.

Ist dann $(P_1 P_2 P_5) = -1$, so können wir uns auf $(P_1 P_3 P_4) \in \{-1, i\}$ beschränken (für $-i$ vertausche P_3 und P_4).

Folgende Lagetableaus sind dann möglich:

$(P_1 P_3 P_4)$	-1									i								
$(P_1 P_3 P_5)$	-1			i			-i			-1			i			-i		
$(P_1 P_4 P_5)$	-1	i	-i	-1	i	-i	-1	i	-i	-1	i	-i	-1	i	-i	-1	i	-i
$(P_2 P_3 P_4)$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	i	i	i	i	i	i	i	i	i
$(P_2 P_3 P_5)$	-1	-1	-1	i	i	i	-i	-i	-i	-1	-1	-1	i	i	i	-i	-i	-i
$(P_2 P_4 P_5)$	-1	i	-i	-1	i	-i	-1	i	-i	-1	i	-i	-1	i	-i	-1	i	-i
$(P_3 P_4 P_5)$	-1	i	-i	-i	-1	i	i	-1	i	i	-1	i	-1	-1	i	-i	i	i
Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

In Nr 6, 8, 11, 16 kommt im Widerspruch zur Voraussetzung der Wert 1 vor.

In Nr 1, 2, 3, 4, 7, 10 liegen $P_1, \dots, P_5$ auf einer Quadrik, die in diesen Punkten die Quartik doppelt schneidet (wegen $(P_1 P_2 P_3) = (P_1 P_2 P_4) = (P_1 P_2 P_5) = (P_1 P_i P_j) = (P_1 P_i P_k) = -1$ mit $\{i, j, k\} = \{3, 4, 5\}$), so etwas gibt es nicht.

Setzen wir in Nr 9

$$P'_1 = P_3 \quad P'_2 = P_4 \quad P'_3 = P_1 \quad P'_4 = P_2 \quad P'_5 = P_5,$$

$$\text{in Nr 12} \quad P'_4 = P_5 \quad P'_5 = P_4 \quad P'_1 = P_1 \quad \text{sonst,}$$

$$\text{in Nr 13} \quad P'_1 = P_5 \quad P'_2 = P_4 \quad P'_3 = P_1 \quad P'_4 = P_2 \quad P'_5 = P_3,$$

so erhalten wir immer Nr 5.

In Nr 5 sind die Lagetableaus von

$$P_1, P_2, P_3, P_4 \text{ bzw } P_1, P_2, P_3, P_5 \text{ bzw } P_1 P_2 P_4 P_5 \\ (-1, -1, -1, -1) \text{ bzw } (-1, -1, 1, 1) \text{ bzw } (-1, -1, 1, 1).$$

Daher erhalten wir eine isomorphe Quartik

$$Q_{4,2}(a_{004}:a_{112}, p) \text{ mit}$$

$$P_4 = (p:1:p:1) \text{ und } P_5 = (q:\frac{(\frac{1}{2}-\frac{i}{2})q+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}:1) \text{ und es gilt}$$

$$0 = q \cdot \frac{(\frac{1}{2}-\frac{i}{2})q+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}} + (-\frac{1}{2}+\frac{i}{2})q \cdot \frac{1}{p} + (-\frac{1}{2}+\frac{i}{2})p \cdot \frac{(\frac{1}{2}-\frac{i}{2})q+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}} - ip \cdot \frac{1}{p} = \\ = \frac{i(p-1)}{p(q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2})} \cdot (q-1+i)p + ((-1-i)q^2+q) .$$

$$\text{Wegen } p \neq 1 \text{ ist } p = \frac{(1+i)q^2-q}{q-1+i} = (1+i)q \frac{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}{q-1+i} .$$

Nach 2.4.2 besitzt diese Quartik einen Automorphismus

$$\begin{pmatrix} 1 & p^2 & -2p \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & p & -1-p \end{pmatrix}, \text{ dieser vertauscht } P_5 \text{ mit einem sechsten}$$

$$\text{Flachpunkt } P_6 = (iq:i \cdot \frac{(\frac{1}{2}-\frac{i}{2})q+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}:1).$$

Durch diesen Automorphismus und insbesondere die auf den Flachpunkten induzierte Permutation

$$[P_1 P_3] [P_2 P_4] [P_5 P_6]$$

sind alle $(P_i P_j P_6)$ für $1 \leq i, j \leq 4$ bestimmt.

Wegen $(P_1 P_2 P_6) = (P_3 P_4 P_5) = -1 = (P_1 P_2 P_5)$ und

$$iq \cdot i \cdot \frac{(\frac{1}{2}-\frac{i}{2})q+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}} + (-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})iq \cdot \frac{(\frac{1}{2}-\frac{i}{2})q+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}} + (-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})q \cdot i \cdot \frac{(\frac{1}{2}-\frac{i}{2})q+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}} + i \cdot q \cdot \frac{(\frac{1}{2}-\frac{i}{2})q+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}} = 0 \text{ ist } (P_1 P_5 P_6) = -1.$$

Wir setzen nun $P'_1 = P_1$ $P'_2 = P_2$ $P'_3 = P_6$ $P'_4 = P_5$ $P'_5 = P_3$

und erhalten Nr 15.

Setzen wir

in Nr 14 $P'_4 = P_5$ $P'_5 = P_4$ $P'_i = P_i$ sonst,

in Nr 18 $P'_3 = P_5$ $P'_5 = P_3$ $P'_i = P_i$ sonst, so bekommen

wir wieder Nr 15.

Nr 15 wird in 2.5.2 behandelt.

In Nr 17 setzen wir

$P'_1 = P_5$ $P'_2 = P_4$ $P'_3 = P_3$ $P'_4 = P_1$ $P'_5 = P_2$ und erhalten

das Lagetableau

$T_{5,3} = (i, -i, -i, i, i, -1, -i, -i, -1, -1)$ (siehe 2.5.3).

Ist $(P_1 P_2 P_5) \neq -1$, so können wir $(P_1 P_3 P_4) = i$ annehmen

(für $-i$ vertauschen wir P_3 und P_4 ,

ist $(P_1 P_3 P_4) = -1$, so gibt es $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ mit

$(P_i P_j P_5) = -1$, oBdA $(P_1 P_2 P_5) = -1$).

Durch eventuelle Vertauschung erreichen wir $(P_1 P_2 P_5) = i$.

Die möglichen Lagetableaus ergeben sich dann so:

$(P_1 P_3 P_5)$	-1			i			-i		
$(P_1 P_4 P_5)$	-1	i	-i	-1	i	-i	-1	i	-i
$(P_2 P_3 P_5)$	-i	-i	-i	-1	-1	-1	1	1	1
$(P_2 P_4 P_5)$	-i	-1	1	-i	-1	1	-i	-1	1
$(P_3 P_4 P_5)$	i	1	-1	-1	i	-i	1	-i	i
Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9

In Nr 2, 3, 6, 7, 8, 9 gibt es drei Flachpunkte auf einer Geraden, was der Voraussetzung widerspricht.

In Nr 1 setzen wir

$$P'_1 = P_5 \quad P'_2 = P_1 \quad P'_3 = P_3 \quad P'_4 = P_4 \quad P'_5 = P_2$$

und erhalten Nr 5.

In Nr 5 setzen wir

$$P'_1 = P_1 \quad P'_2 = P_4 \quad P'_3 = P_2 \quad P'_4 = P_5 \quad P'_5 = P_3 \text{ und erhalten}$$

das Lagetableau $T_{5.4} = (-1, i, -i, i, -1, -i, -1, i, i, -1)$

(siehe 2.5.4).

In Nr 4 setzen wir $P'_4 = P_5 \quad P'_5 = P_4 \quad P'_i = P_i$ sonst

und erhalten das Lagetableau

$T_{5.5} = (-1, i, -1, i, i, -1, -1, i, i, -1)$ (siehe 2.5.5).

Kommen die Werte 1 und -1 beide nicht im Lagetableau vor, so ist $(P_i P_j P_k) = \pm i$ für alle i, j, k .

Nach 2.4 ist oBdA

$$(P_1 P_2 P_3) = i, \quad (P_1 P_2 P_4) = -i.$$

Für $(P_1 P_2 P_5) = i$ setzen wir

$$P'_1 = P_2 \quad P'_2 = P_1 \quad P'_3 = P_4 \quad P'_4 = P_3 \quad P'_5 = P_5, \text{ dann ist}$$

$$(P'_1 P'_2 P'_3) = i, \quad (P'_1 P'_2 P'_4) = (P'_1 P'_2 P'_5) = -i.$$

Deshalb können wir $(P_1 P_2 P_5)^{-i}$ annehmen und es gibt folgende Möglichkeiten:

$(P_1 P_3 P_4)$	i				-i			
$(P_1 P_3 P_5)$	i		-i		i		-i	
$(P_1 P_4 P_5)$	i	-i	i	-i	i	-i	i	-i
$(P_2 P_3 P_4)$	-i	-i	-i	-i	i	i	i	i
$(P_2 P_3 P_5)$	-i	-i	i	i	-i	-i	i	i
$(P_2 P_4 P_5)$	i	-i	i	-i	i	-i	i	-i
$(P_3 P_4 P_5)$	i	-i	-i	i	-i	i	i	-i
Nr	1	2	3	4	5	6	7	8

Wir setzen in

$$\text{Nr 1} \quad P_1^i = P_1 \quad P_2^i = P_2 \quad P_3^i = P_3 \quad P_4^i = P_5 \quad P_5^i = P_4$$

$$\text{Nr 3} \quad P_1^i = P_1 \quad P_2^i = P_3 \quad P_3^i = P_4 \quad P_4^i = P_2 \quad P_5^i = P_5$$

$$\text{Nr 4} \quad P_1^i = P_3 \quad P_2^i = P_2 \quad P_3^i = P_4 \quad P_4^i = P_5 \quad P_5^i = P_1$$

$$\text{Nr 5} \quad P_1^i = P_3 \quad P_2^i = P_2 \quad P_3^i = P_5 \quad P_4^i = P_4 \quad P_5^i = P_1$$

$$\text{Nr 6} \quad P_1^i = P_1 \quad P_2^i = P_3 \quad P_3^i = P_5 \quad P_4^i = P_2 \quad P_5^i = P_4$$

und erhalten in jedem Fall Nr 2.

Nr 2 wird in 2.5.6 behandelt.

In Nr 7 setzen wir $P_4^i = P_5$ $P_5^i = P_4$ und erhalten Nr 8.

In Nr 8 erhalten wir eine isomorphe Quartik $Q_{4.4}$ mit

$P_4 = (p: \frac{1}{p}: 1)$. Das Lagetableau von P_1, P_2, P_3, P_5 ist $(i, -i, -i, i)$, deshalb ist $P_5 = (q: \frac{1}{q}: 1)$.

Das Lagetableau von P_1, P_2, P_4, P_5 ist $(-i, -i, -i, -i)$,

nach 1.6 gilt

$$0 = q \cdot \frac{1}{q} + (-1-i)p \cdot \frac{1}{q} + ip \cdot \frac{1}{p} = (1+i)(1 - \frac{p}{q}).$$

Dann ist aber $P_4 = P_5$.

Nichtsinguläre Quartiken mit genau 5 Flachpunkten, die verschiedenen Scharen angehören, sind nicht

isomorph, denn es gibt keine Permutation auf $\{P_1, \dots, P_5\}$, die zwei Lagetableaus ineinander transformiert.

Dies sieht man leicht an den Werten -1 der Tripelfunktion: in der Reihenfolge der Fälle 2.5.1 bis 2.5.6 ist ihre Anzahl im Lagetableau

2, 3, 3, 4, 5, 0.

Diese Anzahl wird durch eine Permutation nicht geändert. In 2.5.2 hat jedoch jede Quartik bereits 6 Flachpunkte.

$$2.5.1 \quad \underline{T_{5.1} = (1, 1, -1, 1, i, -i, 1, -i, i, -1)}$$

Wir erhalten eine isomorphe Quartik

$$Q_{4.1}(a_0 : \dots : a_4) \text{ mit } (a_0 : \dots : a_4) \in M_{4.1}.$$

Wegen $(P_1 P_2 P_5) = -1$ ist $a_1 = 0$ und wir erhalten als Bedingung für a_0, a_2, a_3, a_4 aus der Gleichung in

2.3.1:

$$a_0^2 + a_2^2 - 4a_0 a_4 + a_3 a_4 = 0.$$

Definition:

$$\text{Sei } Q_{5.1}(a_0 : a_2 : a_4) = Q_{4.1}(a_0 : 0 : a_2 : 4a_0 - \frac{a_0^2 + a_2^2}{a_4} : a_4),$$

$$M_{5.1} = \{(a_0 : a_2 : a_4) \in \mathbb{P}^2 \mid Q_{5.1}(a_0 : a_2 : a_4) \text{ nicht singulär}\},$$

$$G_{5.1} = 1, n'(5.1) = 5.$$

Jede solche Quartik hat dann Flachpunkte

$$P_1 = (1:0:0) \quad P_2 = (0:1:0) \quad P_5 = (1:1:1)$$

$$P_3 = (x_3:1:0) \quad P_4 = (x_4:1:0) \text{ mit}$$

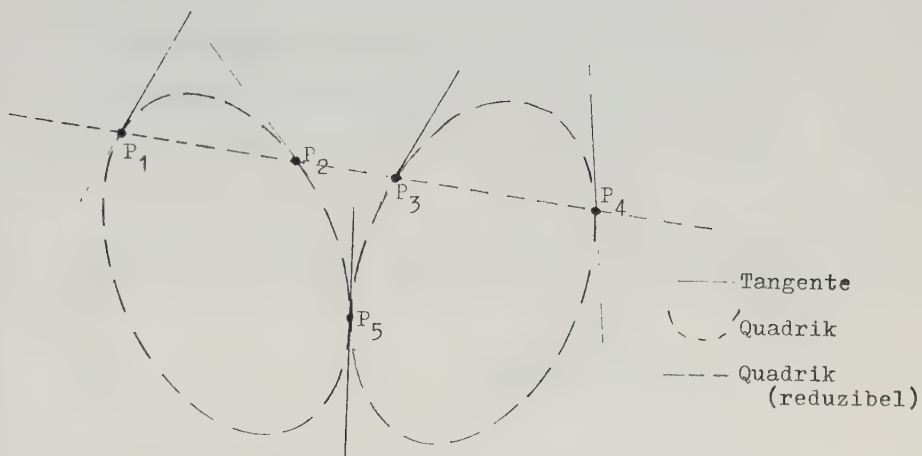
$$x_3 = -1 + \frac{2a_4}{-ia_0 + a_2 + (1+i)a_4},$$

$$x_4 = -1 + \frac{2a_4}{+ia_0 + a_2 + (1-i)a_4}.$$

(Das sind die Lösungen von $a_{310}x^2 + a_{220}x + a_{130} = 0$, unterschieden durch $(P_1 P_3 P_5) = i = -(P_1 P_4 P_5)$)

$Q_{5.1}(-4:0:4) = \{4Z^4 - 36XYZ^2 + 24X^2YZ + 24XY^2Z - 5X^3Y - 6X^2Y^2 - 5XY^3 = 0\}$ ist eine nichtsinguläre Quartik mit genau 5 Flachpunkten.

Genau dann, wenn eine Quartik 5 Flachpunkte besitzt, von denen drei kollinear sind (eine reduzible "Berührquartik" besitzen), gehört sie zu dieser Familie.



$$2.5.2 \quad \underline{T_{5.2} = (-1, -1, -1, i, i, -i, i, i, -i, -i)}$$

Beschränkt auf P_1, P_2, P_3, P_4 ist das Lagetableau $(-1, -1, i, i)$, nach 2.4.3 erhalten wir eine isomorphe Quartik $Q_{4.3}(a_{004}:a_{112}, p)$ mit

$$P_4 = (p: (\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) \frac{p-1+i}{p-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}: 1).$$

Das Quadrupel von Flachpunkten P_1, P_2, P_3, P_5 hat das gleiche Lagetableau, deshalb ist

$$P_5 = (q: (\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) \frac{q-1+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}: 1).$$

Die vier Flachpunkte P_1, P_2, P_4, P_5 haben das Lagetableau $(-1, -1, -i, -i)$, deshalb gilt nach 1.6

$$\begin{aligned} q \cdot (\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) \frac{q-1+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}} + (-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) q \cdot (\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) \frac{p-1+i}{p-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}} + \\ + (-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) (\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) \frac{q-1+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}} \cdot p + 1p \cdot (\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) \frac{p-1+i}{p-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Dies wird nur erfüllt für $q=1$, $q=p$ oder $p=-i$.
Für $q=1$ wäre $P_5 = P_3$, für $q=p$ $P_5 = P_4$.

Daher ist $p=-i$, $P_4 = (-i: -i: 1)$.

Dann gilt für die Quartik $Q_{4.3}$:

$$a_{211} = (-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) a_{112}$$

$$a_{121} = (-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) a_{112} = a_{211} \text{ sowie aus } P_1, P_2, P_3, P_5:$$

$$a_{211} = (-\frac{1}{2}-\frac{1}{2q}) a_{112} - \frac{(q^2+i)(q+i)}{q^2(q-1+i)} a_{004}.$$

$$\text{Hieraus ergibt sich } a_{112} = -2i \frac{q^2+i}{q(q-1+i)} a_{004},$$

$$a_{211} = a_{121} = (-1+i) \frac{q^2+i}{q(q-1+i)} a_{004} \quad \text{und wegen } (P_1 P_2 P_3) = -1$$

$$a_{310} = -\frac{1}{2}a_{211} - \frac{1}{4}a_{112} - \frac{1}{2}a_{004} = a_{130}.$$

Die Quartik hat daher einen Automorphismus $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Unter dieser Abbildung geht der Flachpunkt P_5 über in einen Flachpunkt

$$P_6 = ((\frac{1}{2}-\frac{i}{2})\frac{q-1+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}:q:1).$$

P_5 und P_6 fallen nur zusammen, wenn $q(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) = (\frac{1}{2}-\frac{i}{2})q+1$, also $q=1$ oder $=-i$, dann wäre schon $P_5 = P_3$ bzw $P_5 = P_4$.

Diese Quartik hat also einen sechsten Flachpunkt P_6 mit $(P_1P_2P_6) = (P_2P_1P_5) = -1$ (Transformationen lassen die Tripelfunktion invariant),

die Quadrik $\{XY - (\frac{1}{2}-\frac{i}{2})q\frac{q-1+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}Z^2 = 0\}$ geht offensichtlich

durch P_1, P_2, P_5, P_6 und hat in P_1 und P_2 die Flachtangenten als Tangenten. Wegen $(P_1P_2P_5) = (P_1P_2P_6) = -1$ gilt das auch für P_5 und P_6 . Deshalb ist $(P_1P_5P_6) = -1$.

Definition: Sei $Q_{5.2}(q) = Q_{4.3}(1:-2i\frac{q^2+i}{q(q-1+i)},-i)$

$$M_{5.2} = \{q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1-i\} \mid Q_{5.2}(q) \text{ nicht singular}\}$$

$$G_{5.2} = V_4 \quad n'(5.2) = 6.$$

Jede solche Quartik hat Automorphismen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} q & q' & -2qq' \\ q' & q & -2qq' \\ 1 & 1 & -q-q' \end{pmatrix}, \text{ wobei } q' = (\frac{1}{2}-\frac{i}{2})\frac{q-1+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}.$$

Die Automorphismengruppe, die davon erzeugt wird, ist also isomorph zu $C_2 \oplus C_2 \cong V_4$.

Jede solche Quartik hat mindestens 6 Flachpunkte

$$P_1 = (1:0:0) \quad P_2 = (0:1:0) \quad P_3 = (1:1:1) \quad P_4 = (-i:-i:1)$$

$$P_5 = (q:(\frac{1}{2}-\frac{i}{2})\frac{q-1+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}:1) \quad P_6 = ((\frac{1}{2}-\frac{i}{2})\frac{q-1+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}:q:1) \text{ mit}$$

dem Lagetableau

$$(-1, -1, -1, -1, i, i, i, -i, -i, -1, i, i, i, -i, i, -1, -i, -i, -1, -1).$$

Die nichtsinguläre Quartik $Q_{5,2}(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}) =$

$$= \{3Z^4 + 2iXYZ^2 + (1-i)X^2YZ + (1-i)XY^2Z - 2X^3Y - X^2Y^2 - 2XY^3 = 0\}$$

hat genau 6 Flachpunkte.

Die äquivalente geometrische Bedingung lautet:

es gibt eine Quadrik, die die Quartik in vier Flachpunkten berührt und einen fünften Flachpunkt, sodaß keine drei kollinear sind.

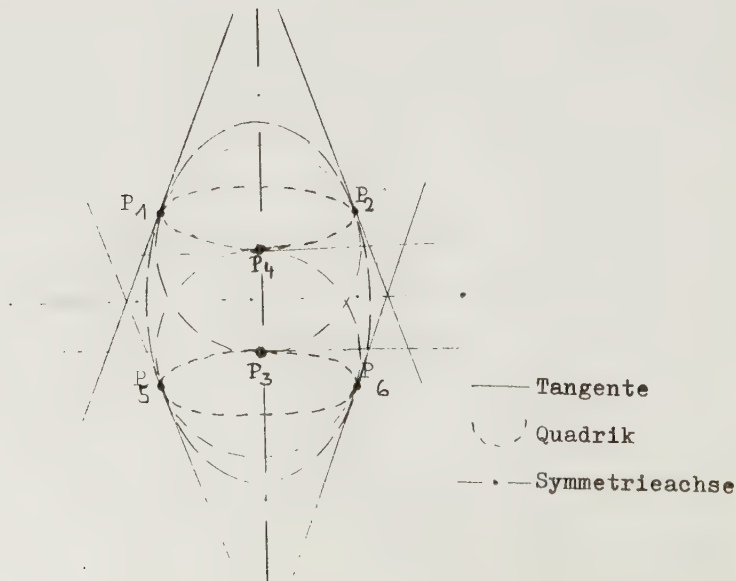
Die Quadrik durch alle fünf Flachpunkte berührt dann im fünften Flachpunkt die Quartik.

Die Existenz ist ja klar. Umgekehrt können wir setzen:

$$(P_1P_2P_3) = (P_1P_2P_4) = (P_1P_3P_4) = (P_1P_2P_5) = -1. \text{ Nach dem}$$

in 2.5 gesagt ist alles bewiesen.

Die Quadrik $\{XY + (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})XZ + (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})YZ - iZ^2 = 0\}$ enthält alle 6 Flachpunkte und berührt die Quartik in P_3 und P_4 .



$$2.5.3 \quad \underline{T_{5,3} = (i, -i, -i, i, i, -1, -i, -i, -1, -1)}$$

Wir gehen analog zu 2.5.2 vor.

Die Lagetables aus von P_1, P_2, P_3, P_4 bzw P_1, P_2, P_3, P_5 bzw P_1, P_2, P_4, P_5 sind $(i, -i, i, -i)$ bzw $(i, -i, i, -i)$ bzw $(-i, -i, -1, -1)$.

Deshalb erhalten wir eine isomorphe Quartik

$Q_{4,5}(a_{004}:a_{112}, p)$ mit

$$P_4 = (p: \frac{(1-i)p-1}{p-1-i}:1), \quad p \neq 0, 1+i, i, \frac{1}{2}+\frac{i}{2} \quad \text{und weiter}$$

$$P_5 = (q: \frac{(1-i)q-1}{q-1-i}:1), \quad q \neq 0, 1+i, i, \frac{1}{2}+\frac{i}{2},$$

$$\begin{aligned} 0 &= q \cdot \frac{(1-i)q-1}{q-1-i} + iq \cdot \frac{(1-i)p-1}{p-1-i} - ip \frac{(1-i)q-1}{q-1-i} - p \cdot \frac{(1-i)p-1}{p-1-i} = \\ &= \frac{(q-p)}{(p-1-i)(q-1-i)} (2pq + (-2-i)q + (-2-i)p + 2i). \end{aligned}$$

Für $q = p$ wäre $P_4 = P_5$, also ist

$$q = \frac{(2+i)p-2i}{2p-2-i} = (1+\frac{i}{2}) \frac{p-\frac{2}{5}-\frac{4i}{5}}{p-1-\frac{i}{2}}, \quad p \neq \frac{2}{5}+\frac{4i}{5}, \frac{2}{5}+\frac{i}{5}, -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}, 1+\frac{i}{2}$$

(für diese p wird $q = 0, i, \frac{1}{2}+\frac{i}{2}, \infty$).

$$\text{Dann ist } P_5 = (\frac{(2+i)p-2i}{2p-2-i}: \frac{(1+i)p+1}{p-1+i}:1).$$

$$\text{Wir haben } a_{211} = (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2} - \frac{1+i}{2p})a_{112} +$$

$$+ (2i - \frac{2+4i}{p} + \frac{-2+2i}{p-i} + \frac{2+2i}{p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}} + \frac{2-2i}{p^2})a_{004}$$

$$= (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2} - \frac{1+i}{q})a_{112} +$$

$$+ (2i - \frac{2+4i}{q} + \frac{-2+2i}{q-i} + \frac{2+2i}{q-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}} + \frac{2-2i}{q^2})a_{004},$$

daraus folgt

$$a_{112} = (-6-2i + 4i \frac{pq}{(p-i)(q-i)} + 4 \frac{pq}{(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})(q-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})} - 4i \frac{p+q}{pq})a_{004}.$$

Definition: Sei $Q_{5,3}(p) = Q_{4,5}(a_{004}:a_{112}, p)$ mit a_{112} wie oben, q wie oben.

$$\text{Sei } M_{5,3} = \left\{ p \in \mathbb{C} \setminus \left\{ 0, i, \frac{1+i}{2}, 1+\frac{i}{2}, -\frac{1+i}{2}, \frac{2+i}{5}, \frac{2+4i}{5} \right\} \mid \right. \\ \left. Q_{5,3}(p) \text{ nicht singulär} \right\}$$

$$G_{5,3} = 1 \quad n'(5,3) = 5.$$

Jede solche Quartik hat Flachpunkte

$$P_1 = (1:0:0) \quad P_2 = (0:1:0) \quad P_3 = (1:1:1)$$

$$P_4 = (p: \frac{(1-i)p-1}{p-1-i}: 1) \quad P_5 = (\frac{(2+i)p-2i}{2p-2-i}: \frac{(1+i)p+1}{p-1+i}: 1).$$

Die nichtsinguläre Quartik $Q_{5,3}(\frac{i}{2}) =$

$$= \{ 5Z^4 + (-126+61i)XYZ^2 + (60-168i)X^2YZ + (75+147i)XY^2Z + \\ + (56+56i)X^3Y + (-114+12i)X^2Y^2 + (44-53i)XY^3 = 0 \}$$

hat genau 5 Flachpunkte.

Die geometrische Bedingung dafür, daß eine Quartik dieser Familie angehört, ist:

Es gibt fünf Flachpunkte $P_1, \dots, P_5$, von denen je drei nicht kollinear sind, sodaß die Quartik in P_1, P_4, P_5 bzw in P_2, P_4, P_5 bzw in P_3, P_4, P_5 von je einer Quadrik berührt wird und die Quadrik durch alle 5 Flachpunkte in P_1, P_2 und P_3 nicht die Quartik berührt.

Die Existenz ist klar, denn in unserem Fall liegen alle Flachpunkte auf der Quadrik

$\{ XY + (-1+i)XZ + (-1-i)YZ + Z^2 = 0 \}$, die Flachtangenten von P_1, P_2 und P_3 sind nicht tangential an diese Quadrik.

Umgekehrt ist dann $(P_1 P_4 P_5) = -1$.

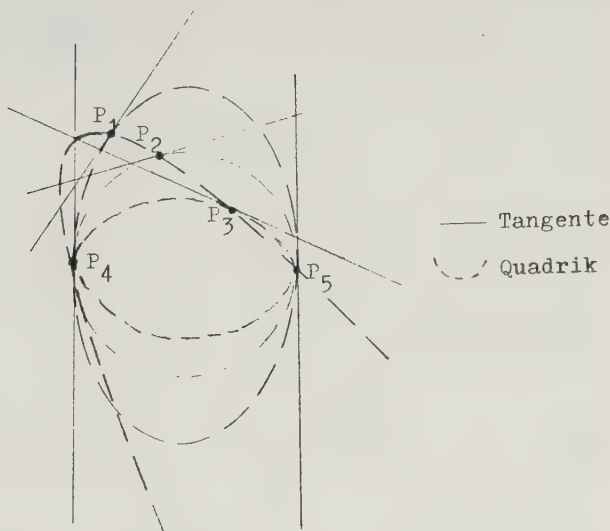
Mit $P'_1 = P_4$ $P'_2 = P_5$ usw bekommen wir $(P'_1 P'_2 P'_1) = -1$,

der Wert 1 kommt im Lagetableau nicht vor.

Deshalb können wir - siehe die erste Tabelle in 2.5 - die Fälle Nr 5, 15 oder 17 erhalten.

In Nr 5 ist jedoch, wie wir bereits wissen, P'_5 Berührungspunkt der Quadrik durch alle Flachpunkte; in Nr 15 sind P'_3 und P'_4 Berührungspunkte.

Da jedoch P_1, P_2 und P_3 keine Berührungspunkte sein sollen, sind wir dann in Fall 17, d.h. wir haben eine Quartik dieser Familie.



$$2.5.4 \quad \underline{T_{5.4} = (-1, i, -i, i, -1, -i, -1, i, i, -1)}$$

Wie oben erhalten wir

$$P_4 = (p: \frac{1+i}{p+1}:1) \quad P_5 = (q: \frac{-iq+1+i}{q}:1) \quad p \neq 0, -i \quad q \neq 0, 1-i$$

$$\text{und } 0 = q \cdot \frac{-iq+1+i}{q} - p \cdot \frac{1+i}{p+1}, \text{ also } q = 1-i + \frac{(-1+i)p}{p+1} = \frac{1+i}{p+1},$$

$$P_5 = (\frac{1+i}{p+1}:p:1).$$

Dann gilt

$$a_{310} = -\frac{1}{2}a_{211} - \frac{1}{4}a_{112} - \frac{1}{2}a_{004} \quad \text{wegen } (P_1 P_2 P_3) = -1$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}}{p} a_{211} + \frac{i}{2p^2} a_{112} + (1+i) \frac{p+i}{p^3(1+i)} a_{004} \quad (P_1 P_2 P_4) = i$$

$$= (-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}) \frac{p+i}{1+i} a_{211} - \frac{i}{2} (\frac{p+i}{1+i})^2 a_{112} + \frac{1-i}{p} (\frac{p+i}{1+i})^3 a_{004} \quad (P_1 P_2 P_5) = -i$$

daraus folgt

$$0 = (\frac{1}{2} - \frac{1-i}{2p}) a_{211} + (\frac{1}{4} + \frac{i}{2p^2}) a_{112} + (\frac{1}{2} + \frac{p+i}{p^3}) a_{004} =$$

$$= (\frac{1}{2} - \frac{p+i}{2}) a_{211} + (\frac{1}{4} - \frac{(p+i)^2}{4}) a_{112} + (\frac{1}{2} - \frac{(p+i)^3}{2p}) a_{004}$$

und weiter

$$0 = (p^4 + (-1+2i)p^3 - 2p^2 - 2ip) a_{112} + (2p^4 + (-2+6i)p^3 - 8p^2 + (-4-2i)p - 4i) a_{004}.$$

$$\text{Daher ist } a_{112} = \frac{-2p^4 + (2-6i)p^3 + 8p^2 + (4+2i)p + 4i}{p(p-1+i)(p-1+i)(p+1)} a_{004},$$

$$a_{211} = -\frac{1}{2}(p+1+i) a_{112} + \frac{-p^3 - 3ip^2 + 4p + i}{p(p-1+i)} a_{004}, \quad p \neq 0, -1, -i, 1-i.$$

Das Lagetableau von P_1, P_2, P_4, P_5 ist $(i, -i, -i, i)$.

Daher gibt es einen Automorphismus, der P_1 mit P_2

und P_4 mit P_5 vertauscht, nämlich

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deswegen ist $a_{121} = a_{211}$ (und $a_{130} = a_{310}$).

Definition: Sei $Q_{5.4}(p) = Q_{3.2}(a_{004}:a_{112}:a_{211}:a_{211})$

mit a_{112}, a_{211} wie oben.

Sei $M_{5.4} = \left\{ p \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -i, 1-i\} \mid \right.$
 $\left. Q_{5.4}(p) \text{ nicht singulär} \right\},$

$G_{5.4} = G_2, \quad n'(5.4) = 5.$

Jede solche Quartik hat einen Automorphismus der Ordnung 2 wie oben.

Jede solche Quartik hat Flachpunkte

$$P_1 = (1:0:0) \quad P_2 = (0:1:0) \quad P_3 = (1:1:1)$$

$$P_4 = (p:\frac{1+i}{p+1}:1) \quad P_5 = (\frac{1+i}{p+1}:p:1)$$

Die nichtsinguläre Quartik $Q_{5.4}(-1+i) =$

$$= \{ 16Z^4 - 36XYZ^2 + (-12-12i)X^2YZ + (-12-12i)XY^2Z + \\ + (7+6i)X^3Y + (30+12i)X^2Y^2 + (7+6i)XY^3 = 0 \}$$

hat genau 5 Flachpunkte.

Genau dann gehört eine Quartik zu dieser Familie, wenn sie 5 Flachpunkte besitzt, von denen keine drei kollinear sind und so, daß es vier verschiedene Quadriken gibt, die in je drei Flachpunkten die Quartik berühren und die sich gegenseitig in einem festen dieser Flachpunkte berühren.

Dann berührt auch die Quadrik durch die 5 Flachpunkte die Quartik in diesem Punkt und jede Quadrik durch die anderen 4 Flachpunkte berührt die Quartik in keinem oder in zwei Flachpunkten.

Die Existenz ist klar.

Gibt es umgekehrt vier verschiedene Berührquadriken, so kommen nur die Fälle 2.5.4 oder 2.5.5 in Frage, denn keine drei Flachpunkte sind kollinear.

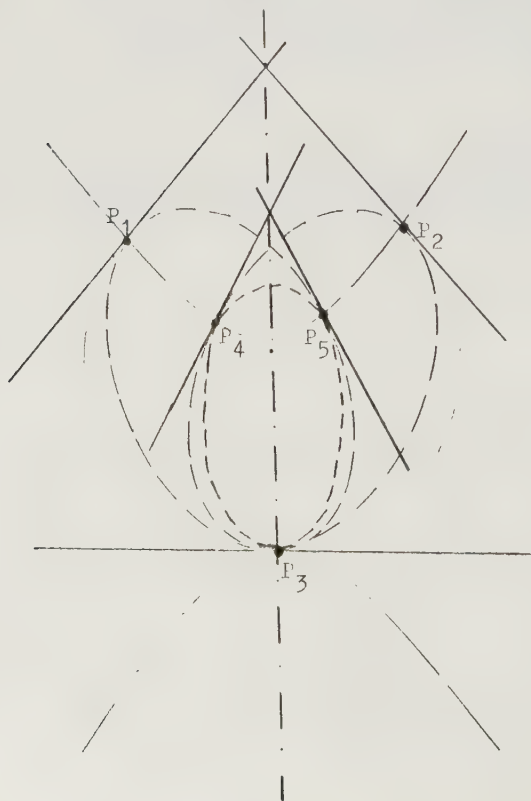
In 2.5.5 gibt es jedoch keine vier Berührquadriken, die alle in einem festen Flachpunkt die Quartik berühren.

Die Quadrik

$$\{XY - \frac{i}{p-1+i}XZ - \frac{i}{p-1+i}YZ - \frac{p-1+i}{p-1-i}Z^2 = 0\}$$

enthält alle 5 Flachpunkte und berührt in P_3 .

Da das Lagetableau von P_1, P_2, P_4, P_5 $(i, -i, -i, i)$ ist, folgt die letzte Aussage.



- Tangente
- - - Quadrik
- - - Symmetrieachse

$$2.5.5 \quad \underline{T_{5.5} = (-1, i, -1, i, i, -1, -1, i, i, -1)}$$

Analog zu den anderen Fällen ist

$$P_4 = (p: \frac{1+i}{p+1}: 1) \quad p \neq 0, -i$$

$$P_5 = (q: \frac{(\frac{1-i}{2})q+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}: 1) \quad q \neq 0, \frac{1}{2}-\frac{i}{2}, 1-i$$

und es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= q \cdot \frac{(\frac{1-i}{2})q+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}} + (-\frac{1}{2}+\frac{i}{2})p \cdot \frac{(\frac{1-i}{2})q+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}} + (-\frac{1}{2}+\frac{i}{2})p \cdot \frac{1+i}{p+1} = \\ &= \frac{((1-i)p + (1+i))q^2 + (ip^2 - p - 2)q + ((-1-i)p^2 + 2p)}{2(q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2})(p+i)} \end{aligned}$$

Wir haben also eine quadratische Gleichung in q , deren Diskriminante

$$-p^4 + (8-2i)p^3 + (-7+12i)p^2 + (-4-8i)p + 4$$

vier verschiedene Nullstellen besitzt.

Daher ist durch obige Gleichung nach der Riemann-Hurwitz'schen Formel eine Riemann'sche Fläche vom Geschlecht 1 und Funktionen p, q darauf definiert. Für jedes Wertepaar (p_0, q_0) , das obiger Gleichung genügt, gibt es ein $f \in F$ mit $(p_0, q_0) = (p(f), q(f))$.

Wir parametrisieren diese Familie mit F (eine Parametrisierung mit einem Gebiet in $\mathbb{C}$, wie in den anderen Fällen, gelingt hier nicht).

Das Lagetableau von P_1, P_2, P_3, P_5 ist $(-1, -1, i, i)$, daher erhalten wir eine isomorphe Quartik $Q_{4.3}(a_{004}:a_{112}, q)$ mit P_5 wie oben angegeben und es gilt

$$a_{211} = -\frac{q+1}{2q}a_{112} - \frac{(q^2+i)(q+i)}{q^2(q-1+i)}a_{004} \quad \text{und}$$

$$a_{310} = \frac{1}{4q}a_{112} + \frac{q^2+iq-1}{2q^2(q-1+i)}a_{004}.$$

Wegen $(P_1 P_2 P_4) = 1$ ist

$$\begin{aligned} 0 &= a_{310} p^3 \cdot \frac{1+i}{p+1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) a_{211} p^2 \cdot \frac{1+i}{p+1} - \frac{1}{2} a_{112} p \cdot \frac{1+i}{p+1} + (-1-i) a_{004} = \\ &= \frac{(1+i)p^3 - 2p^2(q+1) + (2-2i)pq}{4q(p+i)} a_{112} + \\ &+ a_{004} \frac{(1+i)p^3(q^2+iq-1) - 2p^2(q^2+i)(q+i) - (4+4i)(p+i)q^2(q-1+i)}{2q^2(q-1+i)(p+i)}, \\ \frac{a_{112}}{a_{004}} &= \frac{(2+2i)p^3(q^2+iq-1) - 4p^2(q^2+i)(q+i) - (1+i)(p+i)p^2(q-1+i)}{q(q-1+i)((-1-i)p^3 + 2p^2(q+1) + (-2+2i)pq)} \end{aligned}$$

Definition: Sei $Q_{5.5}(f) = Q_{4.3}(a_{004}:a_{112}, q(f))$
mit a_{112} wie oben.

Sei $M_{5.5} = \{f \in \mathbb{F} \mid p(f) \neq 0, -i, \quad q(f) \neq 0, \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, 1-i, \\ Q_{5.5}(f) \text{ nicht singulär.}\}$

$$G_{5.5} = 1, \quad n'(5.5) = 5.$$

Jede solche Quartik hat Flachpunkte

$$P_1 = (1:0:0) \quad P_2 = (0:1:0) \quad P_3 = (1:1:1)$$

$$P_4 = (p: \frac{1+i}{p+1}: 1) \quad P_5 = (q: \frac{(1-i)q+2i}{2q-1+i}: 1) \quad \text{mit}$$

$$(1-i)(p+i)q^2 + (ip^2 - p - 2)q + (-1-i)(p-1+i) = 0.$$

Die nichtsinguläre Quartik $Q_{5.5}(f)$ mit

$$p(f) = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \quad q(f) = -1-i,$$

$$\begin{aligned} \{200Z^4 + (396-228i)XYZ^2 + (-306-42i)X^2YZ + (-336-102i)XY^2Z + \\ + (-46+78i)X^3Y + (123+186i)X^2Y^2 + (-31+108i)XY^3 = 0\} \end{aligned}$$

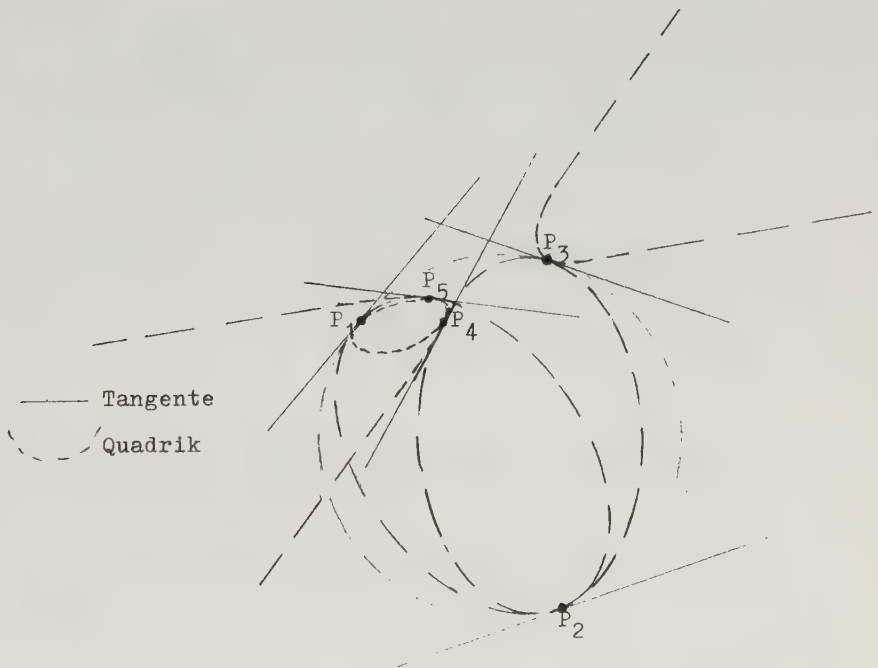
hat genau fünf Flachpunkte.

Eine Quartik gehört genau dann zu dieser Familie, wenn sie 5 Flachpunkte hat, von denen je drei nicht kollinear sind und es 5 verschiedene Quadriken gibt,

die die Quartik in je drei dieser Flachpunkte berühren.

Es gibt ja nur in diesem Fall 5 Berührquadriken:

$$(P_1P_2P_3) = (P_2P_3P_4) = (P_3P_4P_5) = (P_4P_5P_1) = (P_5P_1P_2) = -1.$$



$$2.5.6 \quad \underline{T_{5.6} = (i, -i, -i, i, i, -i, -i, -i, -i)}$$

Wir erhalten eine isomorphe Quartik $Q_{4.5}(a_{004}:a_{112}, p)$

$$\text{mit } P_4 = (p: \frac{(1-i)p-1}{p-1-i}: 1), \quad p \neq 0, 1+i, \frac{1}{2}+\frac{i}{2}, 1, i.$$

$$\text{Weiter ist } P_5 = (q: \frac{(1-i)q-1}{q-1-i}: 1), \quad q \neq 0, 1+i, \frac{1}{2}+\frac{i}{2}, 1, i$$

und es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= q \cdot \frac{(1-i)q-1}{q-1-i} + (-1-i)p \cdot \frac{(1-i)q-1}{q-1-i} + ip \cdot \frac{(1-i)p-1}{p-1-i} = \\ &= \frac{(1-i)}{(p-1-i)(q-1-i)} (pq - p + (-1-i)q + i) \end{aligned}$$

Für $q = p$ wäre $P_4 = P_5$, daher ist $q = \frac{p-i}{p-1-i}$,

$$P_5 = (\frac{p-i}{p-1-i}: \frac{p}{p-1-i}: 1).$$

Aus $a_{211} =$

$$\begin{aligned} &= (-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}-\frac{1+i}{2p})a_{112} + (2i-\frac{2+4i}{p}+\frac{-2+2i}{p-i}+\frac{2+2i}{p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}}+\frac{2-2i}{p^2})a_{004} \\ &= (-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}-\frac{1+i}{2q})a_{112} + (2i-\frac{2+4i}{q}+\frac{-2+2i}{q-i}+\frac{2+2i}{q-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}}+\frac{2-2i}{q^2})a_{004} \quad \text{folgt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{112} &= (-6-2i + 4i \frac{pq}{(p-i)(q-i)} + 4 \frac{pq}{(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})(q-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})} - 4i \frac{p+q}{pq})a_{004} = \\ &= (-4 - \frac{4i}{p} + \frac{4i}{p-i} + \frac{2}{p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}})a_{004}. \end{aligned}$$

Das Lagetableau von P_1, P_4, P_2, P_5 ist $(i, -i, -i, i)$.

Deswegen gibt es einen Automorphismus, der auf diesen Flachpunkten die Permutation $[P_1 P_4] [P_2 P_5]$ erzeugt. Er ist eindeutig:

$$\begin{pmatrix} p(p-1-i) & -i(p-1)(p-i) & (-1+i)p(p-i) \\ (1-i)p-1 & -ip(p-1-i) & 2ip(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) \\ p-1-i & -i(p-1)(p-1-i) & ip^2-ip+i \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

führt P_3 über in $P_6 = \left(\frac{(1+i)p-1}{p-1} : p-1 : 1\right)$.

Damit haben wir sechs Flachpunkte, es gilt

$$(P_1 P_2 P_6) = (P_4 P_5 P_3) = -1, \quad (P_1 P_4 P_6) = (P_4 P_1 P_3) = 1, \\ (P_1 P_5 P_6) = (P_4 P_2 P_3) = -1 \quad \text{und da } P_6 \text{ auf der Quadrik}$$

$\{XY + (-1+i)XZ + (-1-i)YZ + Z^2 = 0\}$ liegt,
ist $(P_1 P_3 P_6) = 1$.

Das Lagetableau von P_1, P_5, P_2, P_6 ist $(i, -i, -i, i)$, daher gibt es einen Automorphismus, der auf diesen Flachpunkten $[P_1 P_5] [P_2 P_6]$ induziert, nämlich

$$\begin{pmatrix} (p-1)(p-i) & (1-i)p-1 & (p-i)(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) \\ p(p-1-i) & -i(p-1)(p-i) & (-1+i)p(p-i) \\ (p-1)(p-1-i) & -i(p-1) & -p^2+(1+2i)p-i \end{pmatrix}$$

Dieser Automorphismus führt P_3 über in P_4 .

Definition: Sei $Q_{5.6}(p) = Q_{4.5}(a_{004} : a_{112}, p)$

mit a_{112} wie oben angegeben,

$$M_{5.6} = \left\{ p \in \mathbb{C} \setminus \left\{ 0, 1, i, \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, 1+i \right\} \mid Q_{5.6}(p) \text{ nicht singular} \right\}$$

$$G_{5.6} = D_3 \quad n!(5.6) = 6.$$

Jede solche Quartik läßt Automorphismen zu, die auf den 6 Flachpunkten die Permutationen

$$[P_1 P_4] [P_2 P_5] [P_3 P_6] \quad \text{und} \quad [P_1 P_5] [P_2 P_6] [P_3 P_4] \quad \text{induzieren.}$$

Die davon erzeugte Gruppe ist isomorph zur

$$D_3 \cong \langle S, T \mid S^3 = T^2 = 1, S^T = S^{-1} \rangle, \text{ der nicht-abelschen Gruppe der Ordnung } 6.$$

Jede solche Quartik hat Flachpunkte

$$P_1 = (1:0:0) \quad P_2 = (0:1:0) \quad P_3 = (1:1:1)$$

$$P_4 = (p: \frac{(1-i)p-1}{p-1-i}: 1) \quad P_5 = (\frac{p-i}{p-1-i}: \frac{p}{p-1}: 1) \quad P_6 = (\frac{(1+i)p-i}{p-1}: p-1: 1)$$

und das Lagetableau

$$(i, -i, -i, -i, i, i, i, -i, i, -i, -i, -i, -i, -i, -i, -i, i, -i, i).$$

Die nichtsinguläre Quartik $Q_{5,6}(\frac{i}{2}) =$

$$= \{ Z^4 - 24XYZ^2 + (12-30i)X^2YZ + (12+30i)XY^2Z + \\ + (10+10i)X^3Y - 21X^2Y^2 + (10-10i)XY^3 = 0 \}$$

hat genau 6 Flachpunkte.

Genau dann ist eine Quartik in dieser Familie, wenn sie 5 Flachpunkte besitzt, sodaß jede Quadrik, die in zwei von diesen Flachpunkten die Quartik berührt und noch durch einen dritten geht, dort die Quartik einfach schneidet.

Dann liegt auf der Quadrik durch die 5 Flachpunkte noch ein sechster Flachpunkt und die Flachtangenten sind nicht tangential an diese Quadrik. Ferner gibt es 18 Quadriken, die in je zwei Flachpunkten die Quartik berühren und durch zwei weitere Flachpunkte gehen.

Die Tripelfunktion nimmt ja nur dann die Werte $\pm i$ an, wenn obige Bedingung erfüllt ist.

Nach 2.5 folgt dann die Behauptung.

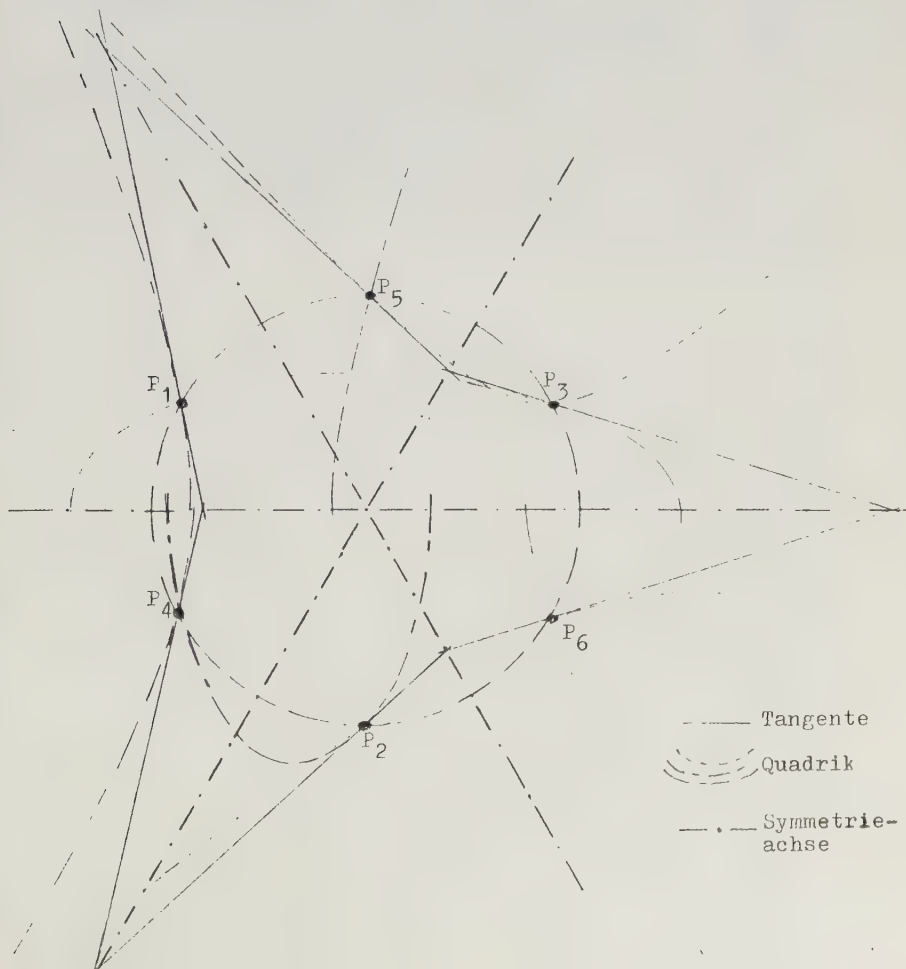
Alle 6 Flachpunkte liegen auf

$\{XY + (-1+i)XZ + (-1-i)YZ + Z^2 = 0\}$, die in P_1 nicht berührt. Obige Automorphismengruppe läßt die Quadrik fest und ist auf den Flachpunkten transitiv.

Es gibt 9 Quadrupel von Flachpunkten mit Lagetableau $T_{4.4}$ und für jedes zwei solche Quadriken, die verschieden sind. Die Quadriken zu verschiedenen Quadrupeln sind

verschieden, sonst hätte eine solche Quadrik mit der Quadrik durch alle Flachpunkte mindestens fünf Schnittpunkte, sie wären identisch und eine Flachtangente berührte diese Quadrik, was nach obigem nicht der Fall ist.

Zur Abbildung: Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden nur 6 halbe Quadriken gezeichnet. Durch Spiegelungen an den 3 Symmetrieachsen (daher auch Drehung um 120°) gehen daraus die erwähnten 18 Quadriken hervor.



2.6 Quartiken mit 6 Flachpunkten

Seien $P_1, \dots, P_6$ sechs Flachpunkte einer nichtsingulären Quartik.

Kommt der Wert 1 im Lagetableau vor, so sind oBdA $P_1, \dots, P_5$ wie in 2.5.1.

Dann liegt P_6 nicht auf $\overline{P_1 P_2 P_3 P_4}$.

Gibt es ein $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ mit $(P_j P_5 P_6) = 1$, so können wir nach der Umbenennung

$$P'_1 = P_3 \quad P'_2 = P_4 \quad P'_3 = P_2 \quad P'_4 = P_1 \quad P'_5 = P_5 \quad P'_6 = P_6$$

(eventuell mehrfach angewendet) $j = 1$ annehmen.

Dann ist $(P_1 P_5 P_6) = 1$ und daher (siehe 1.5)

$$(P_1 P_2 P_6) \neq (P_1 P_2 P_5) = -1, \text{ oBdA } (P_1 P_2 P_6) = -1$$

(sonst ersetze P_6 durch P_7 , wobei P_7 der vierte Flachpunkt auf der Geraden $\overline{P_1 P_5 P_6}$ ist).

P_3 liegt nicht auf der Geraden durch P_5 und P_6 , daher

$$\text{ist } (P_1 P_3 P_6) \neq (P_1 P_3 P_6)(P_3 P_5 P_6) = (P_1 P_3 P_5)(P_1 P_5 P_6) = 1,$$

wegen $(P_1 P_2 P_6) = -1$ ist $(P_1 P_3 P_6) \neq -1$.

Also gilt $(P_1 P_3 P_6) = -1$, $(P_1 P_4 P_6) = 1$ (siehe 2.6.1).

Gibt es kein $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ mit $(P_j P_5 P_6) = 1$, so ist

oBdA $(P_1 P_2 P_6) \in \{-1, 1\}$ (denn die Umbenennung

$$P'_1 = P_2 \quad P'_2 = P_1 \quad P'_3 = P_4 \quad P'_4 = P_3 \quad P'_5 = P_5 \quad P'_6 = P_6$$

läßt das Lagetableau von $P_1, \dots, P_5$ fest und es gilt

$$(P'_1 P'_2 P'_6) = (P_1 P_2 P_6)^{-1}.$$

Weiter ist nach 1.5 $(P_1 P_3 P_6) \neq (P_1 P_2 P_6)$ und $(P_1 P_4 P_6)$ eindeutig festgelegt durch

$$(P_1 P_2 P_6) \neq (P_1 P_4 P_6) \neq (P_1 P_3 P_6).$$

Es ergeben sich folgende Möglichkeiten:

$(P_1 P_2 P_6)$	-1						i			
$(P_1 P_3 P_6)$	i			-i			-i			-1
$(P_1 P_4 P_6)$	-i			i			-1			-i
$(P_2 P_3 P_6)$	-i			i			-1			i
$(P_2 P_4 P_6)$	i			-i			i			-1
$(P_3 P_4 P_6)$	-1			-1			-i			i
$(P_1 P_5 P_6)$	-1	i	-i	-1	i	-i	-1	i	-i	
$(P_2 P_5 P_6)$	-1	i	-i	-1	i	-i	-i	-1	1	
$(P_3 P_5 P_6)$	-1	i	-i	1	-i	i	1	-i	i	
$(P_4 P_5 P_6)$	-1	i	-i	1	-i	i	-i	-1	1	
Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

In Nr 10 setzen wir $P'_1 = P_3$ $P'_2 = P_4$ $P'_3 = P_2$ $P'_4 = P_1$ $P'_5 = P_5$ $P'_6 = P_6$ und erhalten eine der Nummern 7,8 oder 9.

In Nr 4,7,9 kommt im Widerspruch zur Voraussetzung der Wert 1 vor.

In Nr 3 bzw 5 setzen wir $P'_1 = P_1$ $P'_2 = P_2$ $P'_3 = P_4$ $P'_4 = P_3$ $P'_5 = P_6$ $P'_6 = P_5$ und erhalten Nr 2 bzw 6.

In Nr 2 haben P_5, P_1, P_3, P_6 das Lagetabeau $(i, -i, -i, i)$,

deshalb gibt es einen Automorphismus, der P_1 und P_5 sowie P_3 und P_6 vertauscht. Folglich werden auch die

Geraden $\overline{P_1 P_3}$ und $\overline{P_5 P_6}$ vertauscht und es gibt zwei

weitere Flachpunkte P_7, P_8 auf $\overline{P_5 P_6}$, nämlich die Bilder von P_2 und P_4 unter diesem Automorphismus.

Er läßt die Tripelfunktion unverändert, deshalb ist

$$(P_1 P_2 P_7)^2 = (P_1 P_2 P_7)(P_5 P_7 P_2) =$$

$$1.5 = (P_1 P_2 P_7) \frac{(P_1 P_5 P_7)(P_1 P_7 P_2)}{(P_1 P_5 P_2)} = \frac{(P_1 P_5 P_7)}{(P_1 P_5 P_2)} = \frac{(P_5 P_1 P_2)}{(P_1 P_5 P_2)} = 1,$$

also $(P_1 P_2 P_7) = -1$, ferner

$$(P_1 P_3 P_7) = (P_5 P_6 P_2) = 1 \text{ und } (P_1 P_5 P_7) = (P_5 P_1 P_2) = -1,$$

für P_7 anstelle P_6 erhalten wir Nr 1.

Nr 1 wird in 2.6.2 behandelt,

Nr 6 in 2.6.3,

Nr 8 in 2.6.4.

In 2.6.5 behandeln wir den Fall, daß es den Wert 1 im Lagetableau nicht gibt, jedoch den Wert -1 und zwar derart, daß es ein Quadrupel von Flachpunkten mit Lagetableau $(-1, -1, -1, -1)$ gibt. Nach 2.5 haben wir dann oBdA das Lagetableau wie in 2.5.2 angegeben.

In allen anderen Fällen können wir uns darauf beschränken, daß der Wert 1 im Lagetableau nicht vorkommt und es kein Quadrupel von Flachpunkten wie oben gibt.

Dann haben $P_1, \dots, P_5$ eines der Lagetableaus

$T_{5.3}$, $T_{5.4}$, $T_{5.5}$ oder $T_{5.6}$.

Sei $T_{5.3}$ vorgegeben. Dann sind die Permutationen

$[P_1 P_2 P_3] [P_4] [P_5]$ und $[P_1] [P_2] [P_3] [P_4 P_5]$ Lagemorphismen L .

Die entsprechenden Umbenennungen $P'_j = L(P_j)$ lassen

also das Lagetableau $T_{5.3}$ fest.

Deshalb können wir, falls es $j \neq k \in \{1, 2, 3\}$ gibt mit $(P_j P_k P_6) = -1$, annehmen, daß

$(P_1 P_3 P_6) = (P_2 P_3 P_6) = -1$, $(P_1 P_2 P_6) = i$ (denn $(P_1 P_2 P_3) = i$).

Für $(P_1 P_4 P_6) = -1$ wäre $(P_2 P_4 P_6) = 1$,

für $(P_1 P_4 P_6) = i$ wäre $(P_3 P_4 P_6) = 1$,

deshalb ist $(P_1 P_4 P_6) = -i$ und $(P_3 P_4 P_6) = -1$.

Mit der zweiten Umbenennung gilt dann auch $(P_3 P_5 P_6) = -1$.

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, da auch

$(P_3 P_4 P_5) = -1$.

Ist für alle $j \neq k \in \{1, 2, 3\}$ $(P_j P_k P_6) = \pm i$, so können wir mit der ersten Umbenennung erreichen, daß $(P_1 P_2 P_6) = -i$

(ist nämlich $(P_1 P_2 P_6) = (P_2 P_3 P_6) = i$, so ist

$$(P_3 P_1 P_6) = \frac{(P_2 P_3 P_1)(P_2 P_1 P_6)}{(P_2 P_3 P_6)} = -i).$$

Ist dann $(P_1 P_3 P_6) = -i$, so folgt aus

$$1 \neq (P_3 P_4 P_6) = -(P_1 P_4 P_6) \text{ und } 1 \neq (P_3 P_5 P_6) = -(P_1 P_5 P_6):$$

$$1 \neq (P_4 P_5 P_6) = -\frac{(P_1 P_5 P_6)}{(P_1 P_4 P_6)} \in \{\pm 1\}, \text{ also}$$

$$(P_4 P_5 P_2) = (P_4 P_5 P_1) = (P_4 P_5 P_6) = -1, (P_4 P_2 P_1) = i,$$

$$(P_4 P_2 P_6) = (P_4 P_1 P_6) = \pm i.$$

Das Lagetableau von P_4, P_5, P_2, P_1, P_6 ist dann wie in Nr 14 bzw 18 der ersten Tabelle in 2.5, nach dem dort und in 2.5.2 gezeigten gibt es wieder ein Quadrupel von Flachpunkten mit Lagetableau $(-1, -1, -1, -1)$.

Ist aber $(P_1 P_3 P_6) = i$, so haben wir wegen der zweiten Umbenennung oBdA $(P_1 P_4 P_6) = -1$ oder $(P_1 P_4 P_6) \neq -1 \neq (P_1 P_5 P_6)$.

Für $(P_1 P_4 P_6) = -1$ gilt dann wegen der Voraussetzung und

$$(P_1 P_4 P_5) = -1 \quad (P_1 P_5 P_6) \neq -1, \text{ d.h. im Lagetableau von}$$

P_1, P_2, P_3, P_5, P_6 kommt sowohl 1 als auch -1 nicht vor.

Nach 2.5 und 2.5.6 gibt es dann 6 Flachpunkte mit dem Lagetableau $T_{6,6}$, siehe 2.6.6 oder den Schluß von 2.6.

Ist $(P_1 P_4 P_6) \neq -1 \neq (P_1 P_5 P_6)$, so gilt

$$1 \neq (P_4 P_5 P_6) = \frac{(P_1 P_4 P_5)(P_1 P_5 P_6)}{(P_1 P_4 P_6)} = -\frac{(P_1 P_5 P_6)}{(P_1 P_4 P_6)} \in \{\pm 1\}.$$

Folglich ist das Lagetableau von P_4, P_5, P_2, P_1, P_6 wie bei $(P_1 P_3 P_6) = -i$ beschrieben.

Haben wir das Lagetableau $T_{5,4}$ vorliegen, so gibt es einen Lagemorphismus $[P_1 P_2] [P_3] [P_4 P_5]$ (wird sogar von

einem Automorphismus induziert).

Die entsprechende Umbenennung läßt $T_{5.4}$ fest. Deshalb ist $\text{oBdA } (P_1 P_2 P_6) \in \{-1, -i\}$.

Ist $(P_1 P_2 P_6) = -1$, so ist wegen $(P_1 P_2 P_3) = -1$ und der Voraussetzung $(P_1 P_3 P_6) \neq -1$.

Mit der Umbenennung können wir annehmen, daß $(P_1 P_4 P_6) = -1$ oder $(P_1 P_4 P_6) \neq -1 \neq (P_2 P_5 P_6)$.

Ist $(P_1 P_4 P_6) = -1$, so gilt

$$(P_1 P_3 P_6) = \frac{(P_1 P_3 P_4)(P_1 P_4 P_6)}{(P_3 P_4 P_6)} = \frac{-i}{(P_3 P_4 P_6)} \neq -i, \text{ also}$$

$$(P_1 P_3 P_6) = (P_2 P_3 P_6) = i \text{ und } (P_3 P_4 P_6) = -1.$$

Wegen $(P_3 P_4 P_2) = (P_3 P_4 P_5) = (P_3 P_4 P_6) = -1$ und

$(P_3 P_5 P_2) = i$, $(P_3 P_6 P_2) = -i$ erhalten wir ein Lagetableau

wie in Nr 12, 15 oder 18 der ersten Tabelle in 2.5.

Daher gibt es im Widerspruch zur Voraussetzung vier Flachpunkte mit $(-1, -1, -1, -1)$.

Ist nun $(P_1 P_4 P_6) \neq -1$, so ist wegen

$$(P_1 P_4 P_6) = \frac{(P_1 P_2 P_6)(P_2 P_4 P_6)}{(P_1 P_2 P_4)} = i(P_2 P_4 P_6) \neq i \text{ und}$$

$$(P_1 P_5 P_6) = \frac{(P_1 P_2 P_6)(P_2 P_5 P_6)}{(P_1 P_2 P_5)} = -i(P_2 P_5 P_6) \neq -i \cdot (\pm 1) = \mp i$$

$$(P_1 P_4 P_6) = -i \text{ und } (P_1 P_5 P_6) = -1.$$

Ist dabei $(P_1 P_3 P_6) = -i$, so vertauschen wir P_3 mit P_6

und erhalten dann den Fall mit $(P_1 P_3 P_6) = i$, wobei

die anderen Werte ungeändert bleiben.

Wir haben also zusätzlich zu $T_{5.4}$

$$(P_1 P_2 P_6) = (P_1 P_5 P_6) = -1, (P_1 P_3 P_6) = i, (P_1 P_4 P_6) = -i.$$

Dann ist (siehe 2.5.4) $P_4 = (p: \frac{1+i}{p+1}: 1)$, $P_5 = (\frac{1+i}{p+1}: p: 1)$,

$$P_6 = (q: (\frac{1}{2} - \frac{i}{2}) \frac{q-1+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}: 1) \text{ mit}$$

$$q \cdot \left(\frac{1-i}{2-i}\right) \frac{q-1+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1-i}{2-i}\right) \cdot q \cdot \frac{1+i}{p+i} + \left(-\frac{1+i}{2+i}\right) \cdot p \cdot \frac{1+i}{p+i} = 0 \text{ und}$$

$$q \cdot \left(\frac{1-i}{2-i}\right) \frac{q-1+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1-i}{2-i}\right) \cdot \left(\frac{1-i}{2-i}\right) \frac{q-1+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1+i}{p+i} + \left(-\frac{1+i}{2+i}\right) \cdot \frac{1+i}{p+i} \cdot p = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt $q = 1$ oder $q = -i$.

Da $P_6 \neq P_3$, ist $P_6 = (-i:-i:1)$. Dann folgt weiter

$p = -\frac{1-i}{2-i}$, nach 2.5.4 haben wir dann die Quartik

$$Q_{5.4} \left(-\frac{1-i}{2-i}\right) = \{5Z^4 + (12-6i)XYZ^2 + (-9-3i)X^2YZ + (-9-3i)XY^2Z + \\ + (-1+3i)X^3Y + (3+6i)X^2Y^2 + (-1+3i)XY^3 = 0\}.$$

Diese Quartik hat einen weiteren Flachpunkt

$P_7 = (-\frac{1-i}{2-i}:1:1)$ auf der Geraden $\overline{P_1P_3}$, im Widerspruch zur Voraussetzung (tatsächlich hat diese Quartik 12 Flachpunkte, es ist die $Q_{9.3}(0)$).

Ist $(P_1P_2P_6) = -i$, so ergibt sich

$$(P_1P_3P_6) = \frac{(P_1P_2P_6)(P_2P_3P_6)}{(P_1P_2P_3)} = i(P_2P_3P_6) \neq i \text{ und}$$

$$(P_1P_4P_6) = \frac{(P_1P_2P_6)(P_2P_4P_6)}{(P_1P_2P_4)} = -(P_2P_4P_6) \neq -1.$$

Ist $(P_1P_3P_6) = -1$, so ist

$$(P_1P_3P_5) = (P_1P_3P_2) = (P_1P_3P_6) = -1,$$

$$(P_1P_5P_2) = i, (P_1P_2P_6) = -i.$$

Das Lagetableau von P_1, P_3, P_5, P_2, P_6 ist dann wie in den Fällen von Nr 12, 15 oder 18 in der ersten Tabelle von 2.5, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Ist $(P_1P_3P_6) = -i$, so erhalten wir

$$(P_2P_3P_1) = (P_2P_3P_6) = (P_2P_3P_4) = -1,$$

$$(P_2P_1P_6) = i, (P_2P_1P_4) = -i, \text{ also ein Lagetableau wie}$$

in Nr 16, 17 oder 18 der ersten Tabelle in 2.5.

Wegen der Voraussetzung bleibt nur Nr 17, dann

haben jedoch P_4, P_6, P_1, P_2, P_3 das Lagetableau $T_{5.3}$,

das haben wir schon behandelt.

Haben die Flachpunkte $P_1, \dots, P_5$ das Lagetableau $T_{5.5}$, so gilt das auch für P_2, P_3, P_4, P_5, P_1 .

Die entsprechende Umbenennung $P_5^! = P_1$ $P_j^! = P_{j+1}$ ($1 \leq j \leq 4$) läßt $T_{5.5}$ fest.

Ist für $1 \leq j \leq 4$ $(P_j P_{j+1} P_6) = -1$ oder $(P_5 P_1 P_6) = -1$, so können wir durch mehrmalige Anwendung der Umbenennung erreichen, daß $(P_1 P_2 P_6) = -1$.

Wegen $(P_1 P_2 P_3) = (P_1 P_2 P_5) = (P_1 P_2 P_6) = -1$ und der Voraussetzung erhalten wir für P_6, P_5, P_3, P_1, P_2 das Lagetableau $T_{5.3}$, das wurde schon behandelt.

Gilt für alle $1 \leq j \leq 4$ $(P_j P_{j+1} P_6) \neq -1 \neq (P_5 P_1 P_6)$, so ist $(P_1 P_2 P_6) = \pm i$,

$$-1 \neq (P_2 P_3 P_6) = \frac{(P_1 P_2 P_3)(P_1 P_3 P_6)}{(P_1 P_2 P_6)} = \pm i (P_1 P_3 P_6) \neq \pm i.$$

Also ist $(P_2 P_3 P_6) = \mp i$, $(P_1 P_3 P_6) = -1$. Durch die Umbenennung von oben erreichen wir, daß $(P_1 P_2 P_6) = -i$.

Weiter ist dann

$$-1 \neq (P_5 P_1 P_6) = \frac{(P_5 P_1 P_2)(P_5 P_2 P_6)}{(P_1 P_2 P_6)} = i (P_5 P_2 P_6) \neq i,$$

also $(P_5 P_1 P_6) = -i$, $(P_2 P_5 P_6) = -1$. Dann gilt

$$(P_3 P_1 P_6) = \frac{(P_1 P_3 P_5)(P_1 P_5 P_6)}{(P_1 P_3 P_6)} = \frac{i \cdot i}{-1} = 1, \text{ Widerspruch.}$$

Als letztes bleibt uns noch $T_{5.6}$ zu untersuchen.

Dann gibt es nach 2.5.6 sechs Flachpunkte mit dem dort angegebenen Lagetableau (siehe 2.6.6).

Haben zwei Quartiken genau 6 Flachpunkte, so können sie nur die Lagetableaus $T_{6.3}$, $T_{6.4}$, $T_{6.5}$, $T_{6.6}$ haben (siehe 2.6.1 und 2.6.2, dort treten mehr Flachpunkte auf).

Jede Permutation der Flachpunkte läßt die Anzahl der Werte -1 ungeändert, sie ist 4 für $T_{6.3}$, 6 für $T_{6.4}$, 8 für $T_{6.5}$ und 0 für $T_{6.6}$.

Daher gibt es keine Permutation der Flachpunkte, die eines dieser Lagetableaus in ein anderes überführt und die zwei Quartiken sind nicht isomorph, wenn sie verschiedene Lagetableaus besitzen.

$$2.6.1 \quad \underline{T_{6.1} = (1, 1, -1, -i, 1, i, -1, -i, i, 1, 1, -i, -i, i, -1, -i, -1, -i, -i, -1)}$$

Wir erhalten eine isomorphe Quartik

$Q_{5.1}(a_0:a_2:a_4)$ mit

$$P_3 = (x_3:1:0) = (-1 + \frac{2a_4}{-ia_0+a_2+(1+i)a_4}:1:0)$$

$$P_4 = (x_4:1:0) = (-1 + \frac{2a_4}{ia_0+a_2+(1-i)a_4}:1:0)$$

$$P_5 = (1:1:1).$$

Dann ist $P_6 = (p:1:1)$.

Die Transformation $\begin{pmatrix} p-1 & 0 & 0 \\ p & p & -2p \\ p & 0 & -p \end{pmatrix}$ bildet $P_2, \{X=0\}$,

$P_5, \{X+Y-2Z=0\}$ ab nach $(0:1:0), \{X=0\}, (1:0:0), \{Y=0\}$ sowie P_6 nach $(1:1:1)$,

$$P_3 \text{ nach } (\frac{p-1}{p}:\frac{x_3+1}{x_3}:1), P_4 \text{ nach } (\frac{p-1}{p}:\frac{x_4+1}{x_4}:1).$$

Die Lagetableaus von P_5, P_2, P_6, P_3 und P_5, P_2, P_6, P_4 sind $(i, -i, -i, i)$ und $(i, i, -1, -1)$, deshalb gilt nach 1.6

$$\frac{p-1}{p} \cdot \frac{x_3+1}{x_3} - 1 = 0 = \frac{p-1}{p} \cdot \frac{x_4+1}{x_4} - i \cdot \frac{p-1}{p} + i \cdot \frac{x_4+1}{x_4} - 1, \text{ also}$$

$$x_3 = p-1, x_4 = ip - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}. \text{ Hieraus erhalten wir}$$

$$a_2 = (-1 + \frac{1}{p} - \frac{i}{p \cdot \frac{1}{p-2} - \frac{i}{2}})a_4, a_0 = (1 + \frac{i}{p} - \frac{1}{p \cdot \frac{1}{p-2} - \frac{i}{2}})a_4.$$

Da das Lagetableau $(i, -i, -i, i)$ auftritt, haben wir einen Automorphismus, der P_5 mit P_2 und P_6 mit P_3 vertauscht. Er läßt P_1 , den Schnittpunkt der Geraden $\overline{P_2P_3}$ und $\overline{P_5P_6}$, fest, wird durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ gegeben und bildet } P_4 \text{ auf einen Flachpunkt}$$

$$P_7 = (ip + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}:1:1) \text{ ab. Durch diesen Automorphismus}$$

erhalten wir $(P_1 P_4 P_7) = (P_1 P_7 P_4) = -1$, denn die drei Flachpunkte sind ja nicht kollinear.

Definition: Sei $Q_{6.1}(p) = Q_{5.1}(a_0:a_2:a_4)$ mit

$$a_0 = (1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}})a_4, \quad a_2 = (-1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}),$$

sei $M_{6.1} = \{p \in \mathbb{C} \setminus \{0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\} \mid Q_{6.1}(p) \text{ nicht singular}\}$,

$$G_{6.1} = C_2, \quad n'(6.1) = 7.$$

Jede solche Quartik hat einen Automorphismus wie oben, d.h. eine Automorphismengruppe C_2 .

Jede solche Quartik hat 7 Flachpunkte

$$P_1 = (1:0:0) \quad P_2 = (0:1:0) \quad P_3 = (p-1:1:0) \quad P_4 = (ip-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}:1:0)$$

$$P_5 = (1:1:1) \quad P_6 = (p:1:1) \quad P_7 = (ip+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}:1:1) \quad \text{und das}$$

verkürzte Lagetableau

$$(1, 1, -1, -1, i, 1, i, -1, -1, -i, i, -1, 1, 1, 1, \dots).$$

Die nichtsinguläre Quartik $Q_{6.1}(1+i) =$

$$\{2Z^4 - 6X^2YZ + 6iXY^2Z + 2X^3Y + (3-3i)X^2Y^2 + (-1-3i)XY^3 = 0\}$$

hat genau sieben Flachpunkte.

Genau dann ist eine Quartik isomorph zu einer dieser Familie, wenn es zwei Geraden gibt, die aus der Quartik 7 Flachpunkte ausschneiden.

Es gibt drei Quadriken, die die Quartik in P_1, P_j und P_{j+3}

$(2 \leq j \leq 4)$ berühren. Die Geraden $\overline{P_j P_{j+3}}$ schneiden sich

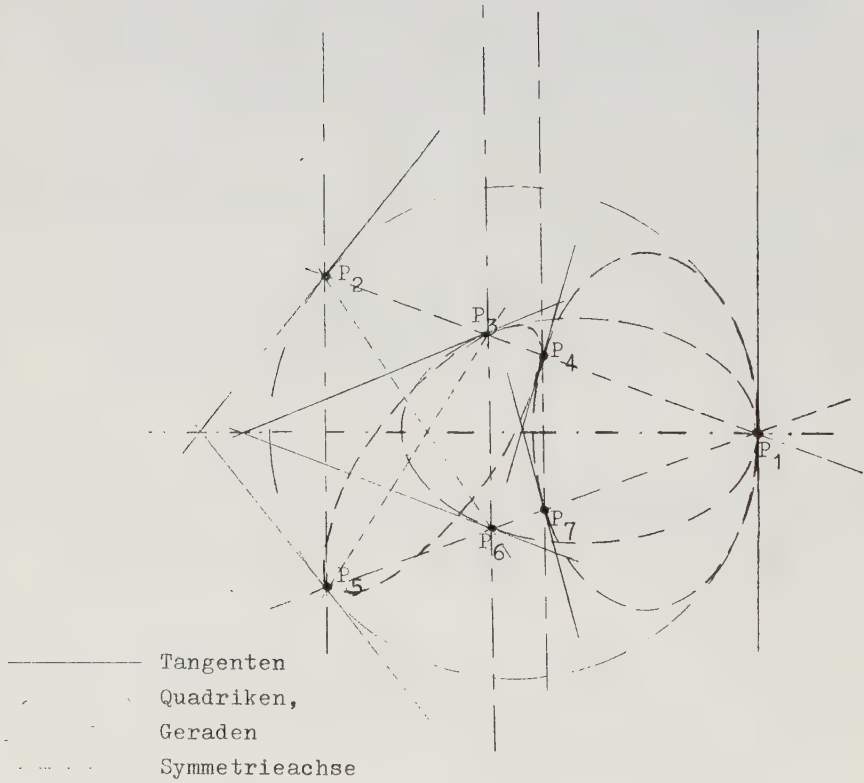
in einem Punkt der Tangente von P_1 .

Weiter sind folgende 7 Punkte kollinear:

P_1 , der Schnittpunkt der Tangenten in P_j und P_{j+3} $(2 \leq j \leq 4)$,

der Schnittpunkt von $\overline{P_j P_{k+3}}$ mit $\overline{P_k P_{j+3}}$ $(2 \leq j < k \leq 4)$

(sie liegen alle auf der Fixpunktgeraden des Automorphismus).



$$2.6.2 \quad T_{6.2} = \frac{(1, 1, -1, -1, 1, i, i, -i, -i, -1, \\ 1, -i, -i, i, i, -1, -1, -1, -1, -1)}{}$$

Wir erhalten eine isomorphe Quartik $Q_{5.1}(a_0:a_2:a_4)$

mit Flachpunkten $P_5 = (1:1:1)$,

$$P_3 = (x_3:1:0) = (-1 + \frac{2a_4}{-ia_0+a_2+(1+i)a_4}:1:0),$$

$$P_4 = (x_4:1:0) = (-1 + \frac{2a_4}{ia_0+a_2+(1-i)a_4}:1:0).$$

Wegen $(P_1P_2P_5) = (P_1P_2P_6) = (P_1P_5P_6) = -1$ ist $P_6 = (p:\frac{1}{p}:1)$.

Die Transformation $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ bildet $P_1, \{Y=0\}$,

$P_5, \{X+Y-2Z=0\}$, P_3, P_6 ab nach

$$(1:0:0), \{Y=0\}, (0:1:0), \{X=0\}, (x_3+1:1:1), (1-p:\frac{1}{1-p}:1).$$

Das Lagetableau von P_1, P_5, P_3, P_6 ist $(-i, -1, i, -1)$, mit der Transformation und 1.6 gilt also

$$(1-p) \cdot \frac{1}{1-p} + (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}) \cdot (1-p) + (-\frac{1}{2} - \frac{i}{2})(x_3+1) = 0, \text{ also } x_3 = -ip.$$

Mit P_4 anstelle von P_3 erhalten wir das Lagetableau

$(i, -1, -i, -1)$ und die Gleichung

$$(1-p) \cdot \frac{1}{1-p} + (-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}) \cdot (1-p) + (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})(x_4+1) = 0, \text{ } x_4 = ip.$$

Daraus können wir $a_0 = \frac{(p-1)^2}{p^2+1}a_4$, $a_2 = -\frac{p^2-1}{p^2+1}a_4$ berechnen

$$\text{und erhalten dann } a_{112} = -2 \frac{(p+1)^2}{p^2+1}a_{004}, \quad a_{220} = 0$$

$$a_{211} = 2 \frac{p+1}{p^2+1}a_{004} = \frac{1}{p}a_{121}, \quad a_{310} = -\frac{1}{p^2+1}a_{004} = \frac{1}{p^2}a_{130}.$$

Da das Lagetableau von P_1, P_2, P_5, P_6 gleich $(-1, -1, -1, -1)$ ist, gibt es Automorphismen

$$\begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ \frac{1}{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & p^2 & -2p \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & p & -1-p \end{pmatrix}. \text{ Letzterer bildet die}$$

Gerade $\{Z=0\}$ auf die Gerade $\{X+pY-(p+1)Z=0\} = \overline{P_5 P_6}$ ab, also liegen darauf noch zwei Flachpunkte P_7, P_8 , die Bilder von P_3 und P_4 .

Obige Automorphismen erzeugen auf den 8 Flachpunkten die Permutationen $[P_1 P_2][P_3 P_4][P_5 P_6][P_7 P_8]$ und

$$[P_1 P_5][P_2 P_6][P_3 P_7][P_4 P_8]. \text{ Weiter ist}$$

$$\begin{pmatrix} -ip^2 & p^2 & (-1+i)p(p+1) \\ 1 & -ip & (-1+i)(p+1) \\ 0 & 0 & (-1+i)p \end{pmatrix} \text{ ein Automorphismus, wie}$$

man sich leicht durch Nachrechnen überzeugt.

Er induziert die Permutation $[P_1 P_3 P_2 P_4][P_5 P_8 P_6 P_7]$.

Definition: Sei $Q_{6,2}(p) = Q_{5,1}(a_0:a_2:a_4)$, a_0, a_2 wie oben, $M_{6,2} = \{p \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \mid Q_{6,2}(p) \text{ nicht singulär}\}$,
 $G_{6,2} = D_4$, $n'(6,2) = 8$.

Jede solche Quartik hat 8 Flachpunkte

$$P_1 = (1:0:0) \quad P_2 = (0:1:0) \quad P_3 = (-ip:1:0) \quad P_4 = (ip:1:0)$$

$$P_5 = (1:1:1) \quad P_6 = (p:\frac{1}{p}:1) \quad P_7 = ((\frac{1}{2}+\frac{i}{2})(p-1):(\frac{1}{2}-\frac{i}{2})\frac{p+1}{p}:1)$$

$$P_8 = ((\frac{1}{2}-\frac{i}{2})(p+1):(\frac{1}{2}+\frac{i}{2})\frac{p-1}{p}:1) \text{ mit dem Lagetableau}$$

$$(1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, i, i, i, i, -i, -i, -i, -i, \\ -1, i, -i, -i, i, -1, \dots) \text{ und Automorphismen wie oben.}$$

Diese erzeugen eine Diedergruppe der Ordnung 8,

$$D_4 \cong \langle S, T \mid S^4 = T^2 = 1, S^T = S^{-1} \rangle.$$

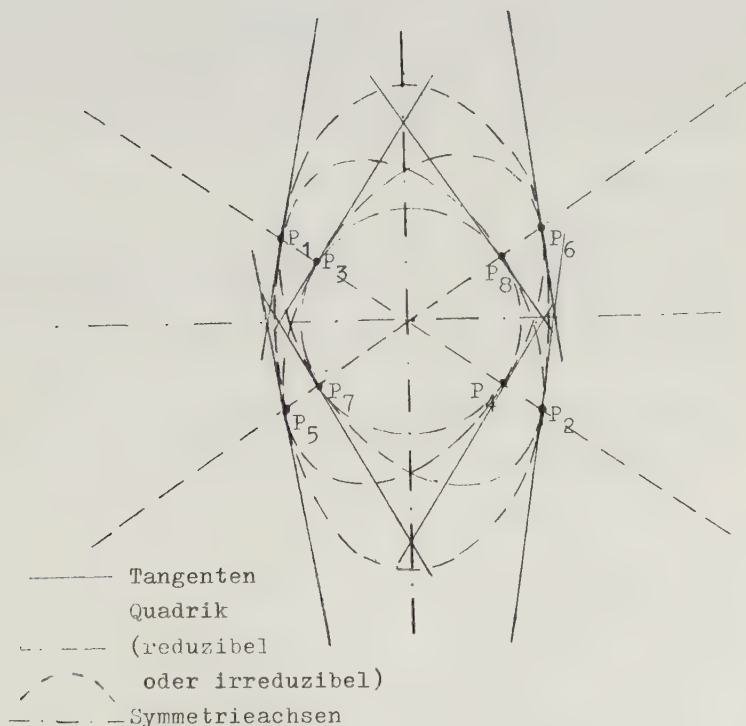
Die nichtsinguläre Quartik $Q_{6,2}(3) =$

$$= \{10Z^4 - 32XYZ^2 + 8X^2YZ + 24XY^2Z - X^3Y - 9XY^3 = 0\} \text{ hat genau 8 Flachpunkte.}$$

Genau dann gehört eine Quartik in diese Familie, wenn es zwei Geraden gibt, die acht Flachpunkte ausschneiden und eine irreduzible Quadrik, die in vier Flachpunkten die Quartik berührt.

Dann gibt es vier solche Quadriken.

Weiter liegen die vier Flachpunkte auf jeder Geraden harmonisch, d.h. ihr Doppelverhältnis ist -1 , und das Doppelverhältnis ist i , wenn wir den vierten harmonischen Punkt durch den Schnittpunkt der beiden Geraden ersetzen.



$$2.6.3 \quad \underline{T_{6,3}} = \underline{(1, 1, -1, -1, 1, i, -i, -i, i, -i, 1, -i, i, i, -i, -i, -1, -1, i, i)}$$

Wir erhalten eine isomorphe Quartik $Q_{5,1}(a_0:a_2:a_4)$ mit Flachpunkten $P_5 = (1:1:1)$,

$$P_3 = (x_3:1:0) = (-1 + \frac{2a_4}{-ia_0+a_2+(1+i)a_4}:1:0),$$

$$P_4 = (x_4:1:0) = (-1 + \frac{2a_4}{ia_0+a_2+(1-i)a_4}:1:0) \text{ und wegen}$$

$$(P_1 P_2 P_6) = -1, (P_1 P_5 P_6) = i:$$

$$P_6 = (p: \frac{(\frac{1}{2} + \frac{i}{2})p-i}{p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}}:1).$$

Die Transformation $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist wie in 2.6.2,

insbesondere geht P_6 nach $((-1-i)(p-1):\frac{-ip-1+i}{p-1}:1)$.

Das Lagetableau von P_1, P_5, P_3, P_6 ist $(-i, -i, -i, -i)$, deshalb gilt

$$(-1-i)(p-1) \cdot \frac{-ip-1+i}{p-1} + (-1-i) \frac{-ip-1+i}{p-1} (x_3+1) + i(x_3+1) = 0,$$

$$\text{dann ist } x_3 = \frac{(-1+i)(p-i)(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})}{(1-2i)p + (-2+i)}.$$

Das Lagetableau für P_1, P_5, P_4, P_6 ist $(i, -i, i, -i)$, wir erhalten analog

$$(-1-i)(p-1) \cdot \frac{-ip-1+i}{p-1} + (-1+i)(-1-i)(p-1) +$$

$$+ (-1-i) \frac{-ip-1+i}{p-1} (x_4+1) + (x_4+1) = 0, \text{ also}$$

$$x_4 = \frac{(-1+i)(p+i)(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})}{p-i}.$$

Daher errechnet sich

$$a_0 = \frac{p^2 + (-2-2i)p+i}{p(p-1-i)} a_4, a_2 = \frac{(p^2-i)(p-i)}{p(p-1)(p-1-i)} a_4. \text{ Wegen des}$$

angegebenen Lagetableaus gibt es einen Automorphismus,

der die Permutation $[P_1 P_3][P_5 P_6]$ induziert, nämlich

$$\begin{pmatrix} (p-1)(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) & (1-i)(p+1)(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})^2 & -2(p^2-i)(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) \\ (-\frac{3}{2}+\frac{i}{2})(p-\frac{4}{5}-\frac{3i}{5}) & -(p-1)(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) & (1-i)(p^2-i) \\ 0 & 0 & (-1-i)(p-1)(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) \end{pmatrix}$$

Er vertauscht auch P_2 mit P_4 .

Definition: Sei $Q_{6.3}(p) = Q_{5.1}(a_0:a_2:a_4)$ mit a_0, a_2 wie oben, $M_{6.3} = \{p \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 1+i\} \mid Q_{6.3}(p) \text{ nicht singulär}\}$, $G_{6.3} = C_2$, $n'(6.3) = 6$.

Jede solche Quartik hat dann 6 Flachpunkte

$$\begin{aligned} P_1 &= (1:0:0) & P_2 &= (0:1:0) & P_5 &= (1:1:1) \\ P_3 &= \left(\frac{(-1+i)(p-1)(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})}{(1-2i)p + (-2+i)} : 1:0 \right) & P_4 &= \left(\frac{(-1+i)(p+1)(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})}{p-i} : 1:0 \right) \\ P_6 &= \left(p : \frac{(\frac{1}{2}+\frac{i}{2})p-i}{p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}} : 1 \right) \end{aligned}$$

und einen Automorphismus, der die Permutation

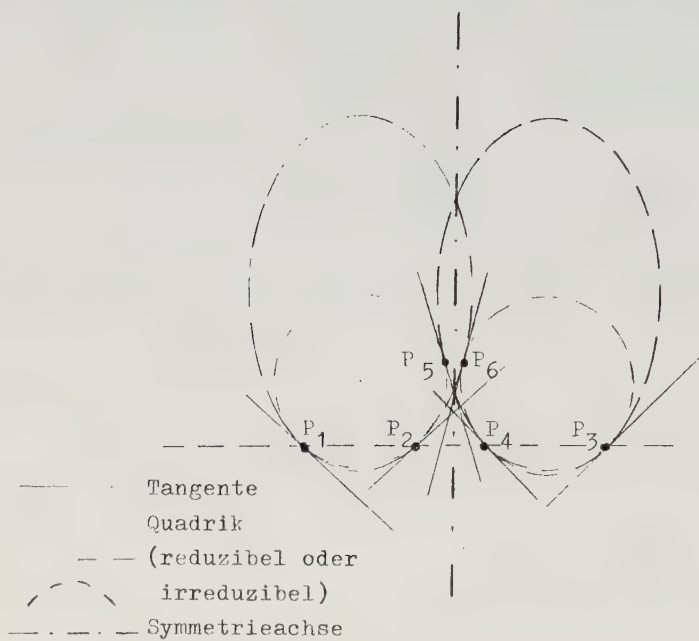
$$[P_1 P_3][P_2 P_4][P_5 P_6] \text{ induziert.}$$

Die nichtsinguläre Quartik $Q_{6.3}(2) =$

$$= \{ 8Z^4 + (-92-28i)XYZ^2 + (56+20i)X^2YZ + (108+24i)XY^2Z + (-9-3i)X^3Y + (-36-8i)X^2Y^2 + (-35-5i)XY^3 = 0 \}$$

hat genau sechs Flachpunkte.

Eine Quartik ist genau dann isomorph zu einer der beschriebenen, wenn sie 6 Flachpunkte besitzt, von denen vier kollinear sind, und es zwei Quadriken gibt, die beide in zwei festen Flachpunkten auf der Geraden die Quartik berühren und dies noch in je einem anderen Flachpunkt tun, wobei jedoch auf der Geraden durch diese beiden Flachpunkte keine weiteren Flachpunkte liegen dürfen.



$$2.6.4 \quad \underline{T_{6.4} = (1, 1, -1, i, 1, i, -i, -i, -1, i, 1, -i, -1, i, i, -1, -1, -i, -i, -1, -1)}$$

Ganz analog zu den letzten Fällen erhalten wir eine Quartik $Q_{5,1}(a_0:a_2:a_4)$ mit $P_5 = (1:1:1)$,

$P_3 = (x_3:1:0)$, $P_4 = (x_4:1:0)$ und weiter

$$P_6 = (p: \frac{1+i}{p+1}:1).$$

Wir transformieren wie dort und erhalten als Bild von P_6 $(-p+1-i: \frac{-1-i}{p-1}:1)$.

Das Lagetableau von P_1, P_5, P_3, P_6 ist $(-i, i, -i, i)$,

deshalb gilt

$$(-p+1-i) \cdot \frac{-1-i}{p-1} + (-1-i)(-p+1-i) + (-1+i) \frac{-1-i}{p-1} (x_3+1) + (x_3+1) = 0,$$

$$x_3 = \frac{(-1-i)(p+i)(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})}{p+1}.$$

Das Lagetableau von P_1, P_5, P_4, P_6 ist $(i, i, -1, -1)$ und wir haben

$$(-p+1-i) \cdot \frac{-1-i}{p-1} - i \cdot (-p+1-i) + i \cdot \frac{-1-i}{p-1} (x_4+1) - (x_4+1) = 0,$$

$$x_4 = \frac{i(p-1)(p+i)}{p-2+i}. \text{ Also erhalten wir}$$

$$a_0 = \frac{p^3 + (-\frac{5}{2} - \frac{i}{2})p^2 + 2p + (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})}{p(p-i)(p-1+i)} a_4,$$

$$a_2 = \frac{p^3 + (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})p^2 - 2ip + (-\frac{1}{2} - \frac{i}{2})}{p(p-i)(p-1+i)} a_4.$$

Definition: Sei $Q_{6.4}(p) = Q_{5,1}(a_0:a_2:a_4)$ mit a_0, a_2 wie oben, $M_{6.4} = \{p \in \mathbb{C} \setminus \{0, i, 1-i\} \mid Q_{6.4}(p) \text{ nicht singular}\}$, $G_{6.4} = 1$, $n'(6.4) = 6$.

Jede solche Quartik hat 6 Flachpunkte

$$P_1 = (1:0:0) \quad P_2 = (0:1:0) \quad P_3 = (\frac{(-1-i)(p+i)(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})}{p+1}:1:0)$$

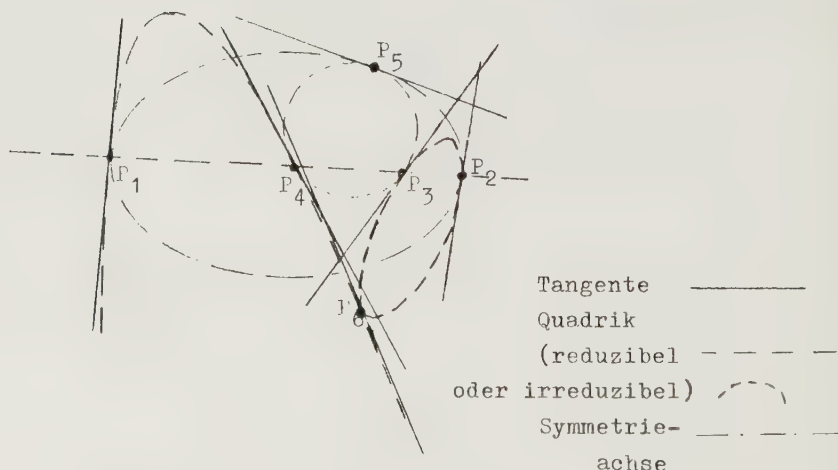
$$P_4 = (\frac{i(p-1)(p+i)}{p-2+i}:1:0) \quad P_5 = (1:1:1) \quad P_6 = (p: \frac{1+i}{p+1}:1).$$

Die nichtsinguläre Quartik $Q_{6.4}(-1-i) =$

$$= \left\{ 40Z^4 + (-12-16i)XYZ^2 + (-10-10i)X^2YZ + (-22+14i)XY^2Z + \right. \\ \left. + (-12+9i)X^3Y + (22+6i)X^2Y^2 + (-6-3i)XY^3 = 0 \right\}$$

hat genau 6 Flachpunkte.

Eine Quartik gehört genau dann zu dieser Familie, wenn es 6 Flachpunkte gibt, von denen vier auf einer Geraden liegen und so, daß es für eine Quadrik, die in zwei Flachpunkten auf der Geraden und im fünften berührt, keine Quadrik gibt, die in den gleichen zwei Flachpunkten auf der Geraden und im sechsten Flachpunkt berührt; weiter darf die Gerade durch den 5. und 6. Flachpunkt keinen Flachpunkt mehr treffen.



$$2.6.5 \quad \underline{T_{6.5} = (-1, -1, -1, -1, i, i, i, -i, -i, -1, i, i, i, -i, -i, -1, -i, -i, -1, -1)}$$

Zu jeder Quartik mit 6 Flachpunkten, wovon 4 das Lagetableau $(-1, -1, -1, -1)$ haben, gibt es eine isomorphe Quartik $Q_{5.2}(q)$, diese hat schon 6 Flachpunkte.

Definition: $Q_{6.5}(q) = Q_{5.2}(q)$, $M_{6.5} = M_{5.2}$,

$$G_{6.5} = G_{5.2} = V_4, \quad n'(6.5) = 6.$$

Jede solche Quartik hat die in 2.5.2 angegebenen Flachpunkte und Automorphismen.

Dort wurde auch schon eine Quartik $Q_{5.2}(q)$ angegeben, die genau 6 Flachpunkte hat.

Natürlich ist auch die geometrische Bedingung dafür, daß eine Quartik zu einer aus dieser Familie isomorph ist, dieselbe wie in 2.5.2.

2.7 Quartiken mit 7 Flachpunkten

Seien $P_1, \dots, P_7$ Flachpunkte einer nichtsingulären Quartik.

Kommt der Wert 1 im Lagetableau vor, so haben $\text{oBdA } P_1, \dots, P_5$ das Lagetableau $T_{5,1}$ und - nach 2.6 -

$P_1, \dots, P_6$ haben eines der Lagetableaus $T_{6,1}, T_{6,2}, T_{6,3}$ oder $T_{6,4}$.

Dann gilt natürlich für $1 \leq j < k \leq 4$ $(P_j P_k P_7) \neq 1$.

Gibt es $1 \leq j \leq 4, 5 \leq k < l \leq 7$ mit $(P_j P_k P_l) = 1$, so gibt

es nach 2.6 7 Flachpunkte mit dem in 2.6.1 angegebenen Lagetableau, siehe 2.7.1.

Gelte jetzt also für $1 \leq j < k \leq 4, 5 \leq k < l \leq 7$ $(P_j P_k P_l) \neq 1$.

Dann sind wir oBdA in einem der Fälle Nr 1,6 oder 8 der ersten Tabelle von 2.6.

Unabhängig davon erhalten wir nun folgende (Unter-)Fälle:

$(P_1 P_2 P_7)$	-1						1						-i					
$(P_1 P_3 P_7)$	1		-i		-i		-1		-1		-1		i					
$(P_1 P_4 P_7)$	-i		i		-1		-i		i		-1		-i		1			
$(P_2 P_3 P_7)$	-i		i		-1		i		-1		-i		-1		1			
$(P_2 P_4 P_7)$	i		-i		i		-1		-1		-i		-1		i			
$(P_3 P_4 P_7)$	-1		-1		-i		i		-i		i		-i		1			
$(P_1 P_5 P_7)$	-1	i	-i	-1	i	-i	-1	i	-i	-1	i	-i	-1	i	-i	-1	i	-i
$(P_2 P_5 P_7)$	-1	i	-i	-1	i	-i	-i	-1	1	-i	-1	1	i	1	-1	i	1	-1
$(P_3 P_5 P_7)$	-1	i	-i	1	-i	i	1	-i	i	i	1	-1	i	1	-1	-1	i	-i
$(P_4 P_5 P_7)$	-1	i	-i	1	-i	i	-i	-1	1	-1	i	-i	1	-i	i	-i	-1	1
Nr	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Nach Voraussetzung können die Nummern 14, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28 gar nicht mehr vorkommen.

In Nr 1 gibt es nach 2.6 sechs Flachpunkte mit dem Lagetableau $T_{6,2}$, nach 2.6.2 also auch 7 Flachpunkte mit dem Lagetableau $T_{7,2}$, das wir aus dem in 2.6.2 angegebenen gewinnen. (siehe 2.7.2).

In Nr 6 gibt es den Lagemorphismus $[P_1 P_2][P_3 P_4][P_5][P_6]$ und einen Automorphismus, der $[P_1 P_3][P_2 P_4][P_5 P_6]$ induziert, also die zwei Umbenennungen

$$P'_1 = P_3 \quad P'_2 = P_4 \quad P'_3 = P_1 \quad P'_4 = P_2 \quad P'_5 = P_6 \quad P'_6 = P_5 \quad \text{und}$$

$$P'_1 = P_2 \quad P'_2 = P_1 \quad P'_3 = P_4 \quad P'_4 = P_3 \quad P'_5 = P_5 \quad P'_6 = P_6, \text{ die das Lagetableau von } P_1, \dots, P_6 \text{ festlassen.}$$

Durch die erste können wir bei $(P_1 P_2 P_7) = -1$ erreichen, daß $(P_1 P_3 P_7) = 1$. Nach 2.6 gibt es dann immer 6 Flachpunkte mit Lagetableau $T_{6,2}$, also können wir Nr 1 annehmen.

Bei $(P_1 P_2 P_7) \neq -1$ können wir durch die zweite Umbenennung erreichen, daß $(P_1 P_2 P_7) = 1$, also Nr 18 oder 20. Dann ist weiter

$$\begin{aligned} 1 \neq (P_1 P_6 P_7) &= \frac{(P_1 P_2 P_7)(P_2 P_6 P_7)}{(P_1 P_2 P_6)} = -1(P_2 P_6 P_7) \neq -1 \\ &= \frac{(P_1 P_4 P_7)(P_4 P_6 P_7)}{(P_1 P_4 P_6)} \neq -1(P_1 P_4 P_7). \end{aligned}$$

In Nr 20 ist $(P_1 P_4 P_7) = -1$, also $(P_1 P_6 P_7) = 1$ (siehe 2.7.3).

In Nr 18 ist $(P_1 P_4 P_7) = -1$, also $(P_1 P_6 P_7) = -1$ und

$$(P_5 P_6 P_7) = - \frac{(P_1 P_5 P_7)}{(P_1 P_5 P_6)} (P_5 P_6 P_7) = - (P_1 P_6 P_7) = 1.$$

Wir hatten vorausgesetzt, daß Nr 6 vorliegt, daher gibt es eine isomorphe Quartik $Q_{6,3}(p)$ mit

$$P_4 = \left(\frac{(-1+i)(p+i)(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})}{p-i} : 1 : 0 \right), \quad P_5 = (1:1:1),$$

$$P_6 = \left(p : \frac{(\frac{1}{2}+\frac{i}{2})p-i}{p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}} : 1 \right).$$

Das Lagetableau von P_1, P_2, P_5, P_7 ist $(-1, i, i, -1)$,

deshalb ist $P_7 = (q : \frac{1+i}{q+1} : 1)$, wegen $(P_5 P_6 P_7) = 1$ ist

$$-\frac{1}{q+i} = \frac{\frac{1+i}{q+1} - 1}{q-1} = \frac{\frac{(\frac{1}{2}+\frac{i}{2})p-i}{p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}} - 1}{p-1} = \frac{-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}{p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}}, \text{ also}$$

$$P_7 = ((1+i)(p-1-i) : \frac{1}{p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}} : 1).$$

Für $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_7$ haben wir das Lagetableau $T_{6,4}$, deshalb gilt nach 2.6.4

$$\begin{aligned} \frac{(-1+i)(p+i)(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})}{p-i} &= x_4 = \frac{i(q-1)(q+i)}{q-2+i} = \\ &= \frac{i((1+i)p+(-1-2i))((1+i)p-i)}{(1+i)p+(-2-i)}, \text{ also } p=1 \text{ oder } p=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Beides kann nicht vorkommen.

In Nr 8 haben wir in den Unterfällen Nr 11, 12, 13 nach 2.6 sechs Flachpunkte mit $T_{6,2}$, also Nr 1;

in Nr 14 und 15 haben wir sechs Flachpunkte mit $T_{6,3}$, also Nr 6. Beide Fälle haben wir schon behandelt.

Es gibt eine Umbenennung, die das Lagetableau von $P_1, \dots, P_6$ ungeändert läßt:

$$P_1' = P_3 \quad P_2' = P_2 \quad P_3' = P_1 \quad P_4' = P_4 \quad P_5' = P_6 \quad P_6' = P_5.$$

Mit ihrer Hilfe erreichen wir in Nr 18 und 26

$$(P_1 P_2 P_7) = -1, \text{ siehe oben.}$$

Weiter können wir damit Nr 20 überführen in Nr 23, 24 oder 25, wegen der Voraussetzung also 25.

Dann ist

$$\begin{aligned}(P_1 P_6 P_7) &= \frac{(P_1 P_2 P_7)(P_2 P_6 P_7)}{(P_1 P_2 P_6)} = -(P_2 P_6 P_7) \neq -1 \\ &= \frac{(P_1 P_3 P_7)(P_3 P_6 P_7)}{(P_1 P_3 P_6)} = -i(P_3 P_6 P_7) \neq -i,\end{aligned}$$

also $(P_1 P_6 P_7) = i$ (siehe 2.7.4).

Kommt nun der Wert 1 im Lagetableau nicht vor, so haben $P_1, \dots, P_6$ nach 2.6 entweder das Lagetableau $T_{6.5}$ oder $T_{6.6}$.

Liegt $T_{6.5}$ vor, so gibt es Automorphismen, die

$[P_1 P_2][P_3][P_4][P_5 P_6]$ und $[P_1 P_5][P_2 P_6][P_3 P_4]$ induzieren sowie einen Isomorphismus $[P_1][P_2][P_3][P_4][P_5 P_6]$.

Die drei entsprechenden Umbenennungen lassen also $T_{6.5}$ fest.

Deswegen können wir uns auf $(P_1 P_2 P_7) \in \{-1, i\}$ beschränken.

Für $(P_1 P_2 P_7) = -1$ ist $(P_1 P_5 P_7) \neq -1 \neq (P_1 P_6 P_7)$, denn sonst läge P_7 auf der Quadrik, die die Quartik schon in P_1, P_2, P_5, P_6 berührt.

Weiter können wir wegen der zweiten Umbenennung $(P_1 P_5 P_7) = i$ annehmen.

$(P_1P_2P_7)$	-1	i							
$(P_1P_5P_7)$	i	-1	i				-i		
$(P_2P_5P_7)$	i	-i	-1				1		
$(P_1P_6P_7)$	i -i	-1	i -i	-1	i -i				
$(P_2P_6P_7)$	i -i	-i	-1	1	-i	-1	1		
$(P_5P_6P_7)$	-1	1	-1	i -i	-i	-1	1		
Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Entgegen der Voraussetzung kommt in Nr 2,5,8,9 der Wert 1 vor.

In Nr 3 und 7 liegt P_7 auf der Berührquartik durch P_1, P_2, P_5, P_6 , das ist nicht möglich.

Aus Nr 6 können wir mittels der Vertauschung von P_5 und P_6 Nr 4 machen.

In Nr 4 ist

$$\begin{aligned}(P_1 P_3 P_7) &= \frac{(P_1 P_2 P_7)(P_2 P_3 P_7)}{(P_1 P_2 P_3)} = -i(P_2 P_3 P_7) \neq -i \\ &= \frac{(P_1 P_3 P_6)(P_1 P_6 P_7)}{(P_3 P_6 P_7)} = \frac{-1}{(P_3 P_6 P_7)} \neq -1,\end{aligned}$$

also $(P_1 P_3 P_7) = i$ und wegen

$$\begin{aligned}(P_1 P_4 P_7) &= \frac{(P_1 P_2 P_7)(P_2 P_4 P_7)}{(P_1 P_2 P_4)} = -i(P_2 P_4 P_7) \neq -i \\ &= \frac{(P_1 P_4 P_5)(P_1 P_5 P_7)}{(P_4 P_5 P_7)} = \frac{i}{(P_4 P_5 P_7)} \neq i\end{aligned}$$

$$(P_1 P_4 P_7) = -1 \text{ (siehe 2.7.5).}$$

In Nr 1 gibt es eine isomorphe Quartik $Q_{6.5}(q)$ mit

$$P_5 = (q:q':1), P_6 = (q':q:1), \text{ wobei } q' = \left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\frac{q-1+i}{q-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}} \neq q.$$

Die Lagetableaus von P_1, P_2, P_5, P_7 und P_1, P_2, P_6, P_7 sind beide $(-1, -1, i, i)$, also liegt P_7 auf den Quadriken

$$\left\{XY + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)q'XZ + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)qYZ - iqq'Z^2 = 0\right\} \text{ und}$$

$$\left\{XY + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)qXZ + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)q'YZ - iqq'Z^2 = 0\right\} \text{ und wir haben}$$

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(q'-q)(X-Y)Z = 0. \text{ Wegen } q' \neq q \text{ und } (P_1 P_2 P_7) = -1$$

ist dann $(P_3 P_4 P_7) = 1$, denn P_3 und P_4 liegen schon

auf $\{X=Y\}$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Ist das Lagetableau von $P_1, \dots, P_6$ $T_{6,6}$,

so gibt es Automorphismen, die auf den Flachpunkten

als Permutationen $[P_1 P_4][P_2 P_5][P_3 P_6]$ und $[P_1 P_5][P_2 P_6][P_3 P_4]$

wirken sowie Lagemorphismen $[P_1][P_2][P_3][P_4 P_5 P_6]$ und

$[P_1 P_2 P_3][P_4][P_5][P_6]$, also vier entsprechende Umbenennungen, die $T_{6,6}$ festlassen.

Gibt es $j, k \in \{1, 2, 3\}$ mit $(P_j P_k P_7) = -1$, so können wir

mittels der letzten Umbenennung erreichen, daß

$$(P_1 P_3 P_7) = (P_2 P_3 P_7) = -1, (P_1 P_2 P_7) = (P_1 P_2 P_3) = i.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (P_1 P_4 P_7) &= \frac{(P_1 P_2 P_7)(P_2 P_4 P_7)}{(P_1 P_2 P_4)} = -(P_2 P_4 P_7) \neq -1 \\ &= \frac{(P_1 P_3 P_7)(P_3 P_4 P_7)}{(P_1 P_3 P_4)} = i(P_3 P_4 P_7) \neq i, (P_1 P_4 P_7) = -i. \end{aligned}$$

Ersetzen wir hierin P_4 durch P_5 , so ergibt sich auch

$$(P_1 P_5 P_7) = -i \text{ und } (P_4 P_5 P_7) = \frac{(P_1 P_4 P_5)(P_1 P_5 P_7)}{(P_1 P_4 P_7)} = -i. \text{ Mit der ersten}$$

der Umbenennungen erhalten wir darum $(P_1 P_2 P_7) = -i$.

Gibt es kein $j, k \in \{1, 2, 3\}$ mit $(P_j P_k P_7) = -1$, so können

wir mit der letzten Umbenennung erreichen, daß $(P_1 P_2 P_7) = -i$.

Setzen wir also $(P_1 P_2 P_7) = -i$ voraus.

Dann ist $(P_1 P_3 P_7) = -(P_2 P_3 P_7) = \pm i$.

Nehmen wir zunächst $(P_1 P_3 P_7) = i$ an, dann ist

$$P_7 = (q: \frac{(1-i)q-1}{q-1-i}:1) \text{ und nach 2.5.6 für } j \in \{4, 5, 6\}$$

$P_j = (p_j : \frac{(1-i)p_j-1}{p_j-1-i} : 1)$. Wegen $(P_1 P_2 P_j) = (P_1 P_2 P_7) = -i$ ist für $(P_1 P_j P_7) = i$

$$q \cdot \frac{(1-i)q-1}{q-1-i} + (-1+i)q \frac{(1-i)p_j-1}{p_j-1-i} - ip_j \frac{(1-i)p_j-1}{p_j-1-i} = 0,$$

d.h. $q = p_j$ oder $q = \frac{(1+i)p_j-1}{p_j-1}$, also

$P_7 = P_j$ oder $P_7 = P_{j-1}$ ($j=5,6$; für $j=4$ $P_7 = P_6$),
für $(P_1 P_j P_7) = -i$

$$q \cdot \frac{(1-i)q-1}{q-1-i} + (-1-i)p_j \frac{(1-i)q-1}{q-1-i} + ip_j \frac{(1-i)p_j-1}{p_j-1-i} = 0,$$

d.h. $q = p_j$ oder $q = \frac{p_j-1}{p_j-1-i}$, also

$$P_7 = P_j \text{ oder } P_7 = P_{j+1} \text{ (für } j=6: P_7 = P_4).$$

Daher ist $(P_1 P_j P_7) = -1$ für alle $j \in \{4,5,6\}$ und

$$q \cdot \frac{(1-i)q-1}{q-1-i} + iq \cdot \frac{(1-i)p_j-1}{p_j-1-i} - i \frac{(1-i)q-1}{q-1-i} \cdot p_j - p_j \frac{(1-i)p_j-1}{p_j-1-i} = 0,$$

d.h. $q = p_j$ oder $p_j = \frac{(2+i)q-2i}{2q-2-i}$. Da $p_j \neq p_7$, ist für $j \in \{4,5,6\}$ $p_j = p_4$, $P_4 = P_5 = P_6$, ein Widerspruch.

Ist jetzt $(P_1 P_3 P_7) = -1$, so ist für $j \in \{4,5,6\}$

$$(P_1 P_j P_7) = \frac{(P_1 P_3 P_7)(P_3 P_j P_7)}{(P_1 P_3 P_j)} = -(P_3 P_j P_7) \neq -1.$$

Ist $(P_1 P_4 P_7) = (P_1 P_5 P_7) = (P_1 P_6 P_7)$, so erhalten wir

$$(P_4 P_5 P_7) = \frac{(P_1 P_4 P_5)(P_1 P_5 P_7)}{(P_1 P_4 P_7)} = (P_1 P_4 P_5) = -i,$$

$$(P_4 P_6 P_7) = \frac{(P_1 P_4 P_6)(P_1 P_6 P_7)}{(P_1 P_4 P_7)} = (P_1 P_4 P_6) = i \text{ und mit der}$$

ersten Umbenennung erhalten wir $(P_1 P_3 P_7) = -(P_1 P_2 P_7) = i$, dies führte (siehe oben) nur zu Widersprüchen.

Sind $(P_1 P_j P_7)$ nicht alle gleich, so wenden wir die

vorletzte Umbenennung an und bekommen:

$$(P_1 P_4 P_7) = (P_1 P_5 P_7) = -(P_1 P_6 P_7) = \pm i.$$

$$\text{Dann ist } (P_4 P_5 P_7) = (P_4 P_6 P_7) = -i,$$

$(P_4 P_1 P_7) = (P_4 P_2 P_7) = -(P_4 P_3 P_7) = \mp i$, mit der ersten Umbenennung erhalten wir den gleichen Fall, jedoch mit anderem Vorzeichen.

Deshalb können wir uns auf das obere Vorzeichen,

$$(P_1 P_4 P_7) = i, \text{ beschränken.}$$

Aus den Lagetableaus von

P_1, P_2, P_3, P_7 bzw P_1, P_2, P_4, P_7 bzw P_1, P_2, P_5, P_7 , nämlich $(i, -i, -i, i)$ bzw $(-i, -i, i, i)$ bzw $(-i, -i, i, i)$, erhalten wir $P_7 = (q: \frac{1}{q}: 1)$,

$$q \cdot \frac{1}{q} + (-1+i) \cdot q \cdot \frac{(1-i)p-1}{p-1-i} - i \cdot p \cdot \frac{(1-i)p-1}{p-1-i} = 0, \text{ also}$$

$$q = \left(\frac{1-i}{2}\right) \frac{p^2 - p + 1}{\frac{1}{2} - i}, \text{ und}$$

$$q \cdot \frac{1}{q} + (-1+i) \cdot q \cdot \frac{p}{p-1} - i \cdot \frac{p-1}{p-1-i} \cdot \frac{p}{p-1} = 0, \quad q = \frac{p^2 + (-1-2i)p + 1}{p(p-1-i)}.$$

Daraus folgt $p = 1$, $p = i$ oder $p^2 + (-2-i)p + 1 = 0$.

Die ersten beiden Fälle waren in 2.5.6 ausgeschlossen, im letzten Fall ist

$$\frac{p-1}{p-1-i} = \frac{p^2 + (-2-i)p + 1 + p - i}{p-1-i} = p, \text{ also } P_5 = P_4.$$

Haben daher von 7 Flachpunkten 6 das Lagetableau $T_{6.6}$, so gibt es drei kollineare Flachpunkte.

Hat eine nichtsinguläre Quartik genau 7 Flachpunkte, so hat sie eines der Lagetableaus $T_{7.1}$, $T_{7.3}$, $T_{7.4}$

(siehe 2.7.2, 2.7.5, dort gibt es je 8 Flachpunkte).

In ihnen kommt der Wert -1 9- bzw 11- bzw 12-mal vor.

Deswegen kann es keine Permutation der Flachpunkte geben, die eines der Tableaus in ein anderes überführt.

$$2.7.1 \quad \underline{T_{7.1} = (1, 1, -1, -i, i, 1, i, -1, -i, -i, i, -1, 1, 1, 1, \dots)}$$

Es gibt eine isomorphe Quartik $Q_{6.1}(p)$.

Definition: $Q_{7.1}(p) = Q_{6.1}(p)$, $M_{7.1} = M_{6.1}$,

$$G_{7.1} = G_{6.1} = C_2, \quad n'(7.1) = 7.$$

Jede solche Quartik besitzt 7 Flachpunkte und die Automorphismen wie in 2.6.1 angegeben.

Dort wurde auch eine $Q_{6.1}(p)$ mit genau 7 Flachpunkten und die äquivalente geometrische Bedingung angegeben.

$$2.7.2 \quad \underline{T_{7.2} = (1, 1, -1, -1, -1, 1, i, i, i, -i, -i, -i, -1, i, -i, \dots)}$$

Es gibt eine isomorphe Quartik $Q_{6.2}(p)$.

Definition: $Q_{7.2}(p) = Q_{6.2}(p)$, $M_{7.2} = M_{6.2}$,

$$G_{7.2} = G_{6.2} = D_4, \quad n'(7.2) = 8.$$

Jede solche Quartik hat 8 Flachpunkte, das Lagetableau und die Automorphismen wie in 2.6.2 angegeben.

Wir können jetzt aber eine stärkere geometrische Bedingung beweisen:

eine Quartik ist genau dann isomorph zu einer in dieser Familie, wenn es zwei Geraden gibt, die 8 Flachpunkte ausschneiden.

Denn seien P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5, P_6, P_7, P_8 kollinear, dann gibt es $j \in \{2, 3, 4\}$ und $k \neq 1 \in \{5, 6, 7, 8\}$, sodaß $(P_1 P_j P_k) = (P_1 P_j P_1) = -1$, oBdA $(P_1 P_2 P_5) = (P_1 P_2 P_6) = -1$.

Dann haben $P_1, \dots, P_6$ das Lagetableau $T_{6.2}$ oder $T_{6.3}$, nach 2.7 gibt es dann entweder 7 Flachpunkte mit $T_{7.2}$ oder mit $T_{7.3}$. Im zweiten Fall existiert jedoch kein achter Flachpunkt und je zwei Geraden schneiden höchstens 6 Flachpunkte aus (siehe 2.7.3).

$$2.7.3 \quad \underline{T_{7,3}} = (1, 1, -1, -1, i, 1, i, -i, -1, -i, i, -i, -i, -1, i, \dots)$$

Wir erhalten eine isomorphe Quartik $Q_{6,3}(p)$ mit

$$P_3 = \left(\frac{(-1+i)(p-i)(p-\frac{1-i}{2})}{(1-2i)p+(-2+i)} : 1 : 0 \right), \quad P_5 = (1:1:1),$$

$$P_4 = \left(\frac{(-1+i)(p+i)(p-\frac{1-i}{2})}{p-i} : 1 : 0 \right), \quad P_6 = \left(p : \frac{(\frac{1+i}{2})p-i}{p-\frac{1-i}{2}} : 1 \right)$$

und einem Automorphismus

$$\begin{pmatrix} (p-i)(p-\frac{1-i}{2}) & (1-i)(p+i)(p-\frac{1-i}{2})^2 & -2(p^2-i)(p-\frac{1-i}{2}) \\ (-\frac{3}{2}+\frac{i}{2})(p-\frac{4}{5}-\frac{3i}{5}) & -(p-i)(p-\frac{1-i}{2}) & (1-i)(p^2-i) \\ 0 & 0 & (-1-i)(p-1)(p-\frac{1-i}{2}) \end{pmatrix},$$

der die Permutation $\begin{bmatrix} P_1 P_3 \\ P_2 P_4 \\ P_5 P_6 \end{bmatrix}$ induziert.

Die Lagetableaus von P_1, P_2, P_5, P_7 und P_1, P_2, P_6, P_7 sind $(-1, i, -1, -i)$ und $(-1, i, i, -1)$, daher ist

$$P_7 = (q : \frac{iq+1-i}{q} : 1) \text{ und}$$

$$q \cdot \frac{iq+1-i}{q} + i \cdot \frac{iq+1-i}{q} \cdot p + (-1-i) \cdot p \cdot \frac{(\frac{1+i}{2})p-i}{p-\frac{1-i}{2}} = 0, \text{ also}$$

$$(p-\frac{1-i}{2})q^2 + ((-1+i)p^2 + (\frac{1-i}{2})p+i)q + ((1-i)p^2 - p) = 0.$$

Wir arbeiten wieder mit der Transformation

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ (wie in 2.6.2 und 2.6.3), die Bilder von } P_4$$

und P_7 sind dann $(\frac{(-1+i)p(p-1)}{p-i} : 1 : 1)$ und

$$((-\frac{1-i}{2})(q-1+i) : (\frac{1-i}{2})\frac{q-1-i}{q-1} : 1).$$

Mit dem Lagetableau von P_1, P_5, P_4, P_7 , $(i, -1, -i, -1)$, gilt

$$(-\frac{1-i}{2})(q-1+i) \cdot (\frac{1-i}{2})\frac{q-1-i}{q-1} + (-\frac{1-i}{2}) \cdot (-\frac{1-i}{2})(q-1+i) +$$

$$+ (-\frac{1+i}{2})\frac{(-1+i)p(p-1)}{p-i} = 0, \text{ also}$$

$$(p-i)q^2 + ((-1+i)p^2 + (-\frac{1-i}{2})p + (\frac{1+3i}{2}))q + ((1-i)p^2 + ip - i) = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen für p und q erhalten wir, da wir $p=1$ ausschließen können,

$$4p^3 + (-9-7i)p^2 + (-1+5i)p + 2i = 0 \quad \text{und}$$

$$3q = (2-2i)p^2 - 5p + 2i.$$

Definition: Sei $M_{7.3}$ die Nullstellenmenge $\{p_1, p_2, p_3\}$ des obigen Polynoms in p . Sei für $j \in \{1, 2, 3\}$

$$Q_{7.3}(p_j) = Q_{6.3}(p_j) \quad \text{und}$$

$$G_{7.3} = G_2, \quad n'(7.3) = 7.$$

Die drei voneinander verschiedenen Quartiken $Q_{7.3}(p_j)$ sind dann nicht singulär und haben genau 7 Flachpunkte

$$P_1 = (1:0:0) \quad P_2 = (0:1:0) \quad P_5 = (1:1:1)$$

$$P_3 = \left(\frac{(-1+i)(p_j-i)(p_j-\frac{1-i}{2})}{(1-2i)p_j + (-2+i)} : 1:0 \right)$$

$$P_4 = \left(\frac{(-1+i)(p_j+i)(p_j-\frac{1-i}{2})}{p_j-i} : 1:0 \right)$$

$$P_6 = \left(p_j : \frac{(\frac{1+i}{2})p_j - i}{p_j - \frac{1-i}{2}} : 1 \right) \quad P_7 = \left(q_j : \frac{iq_j + 1 - i}{q_j} : 1 \right), \quad \text{wobei}$$

$$3q_j = (2-2i)p_j^2 - 5p_j + 2i.$$

Sie haben den oben angegebenen Automorphismus ($p=p_j$) der Ordnung 2, er induziert auf den 7 Flachpunkten die Permutation $[P_1 P_3][P_2 P_4][P_5 P_6][P_7]$.

Wir zeigen, daß es keinen anderen Lagemorphismus gibt. Denn wegen $(P_j P_k P_l) = 1$ genau dann, wenn $j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, wird $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ auf sich abgebildet.

P_7 ist der einzige Punkt mit der Eigenschaft:

ist $(P_7 P_j P_k) = -1$ für $j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$, so ist für $l \in \{5, 6, 7\}$ mit $l \neq 7$ $(P_l P_j P_k) \neq -1$. Daher bleibt P_7 und nach eventueller Nachschaltung des obigen Automorphismus auch P_5 und P_6 fest.

Auch P_1 und P_4 bleiben dann fest, denn es gilt

$(P_1 P_6 P_7) \neq (P_2 P_6 P_7) = (P_3 P_6 P_7) \neq (P_4 P_6 P_7) \neq (P_1 P_6 P_7)$. Wegen $(P_1 P_3 P_7) = -1 \neq (P_1 P_2 P_7)$ haben wir also neben obigem

Lagemorphismus nur noch die Identität.

Es gibt auch keine weiteren Automorphismen, denn jeder Automorphismus induziert einen Lagemorphismus und diese Darstellung ist treu (ist nämlich $(P_j P_k P_l) \neq 1$, so ist die identische Transformation die einzige, die P_j, P_k, P_l samt ihren Tangenten fest läßt, der identische Lagemorphismus wird daher nur vom identischen Automorphismus induziert).

$G_{7.3}$ ist die volle Automorphismengruppe.

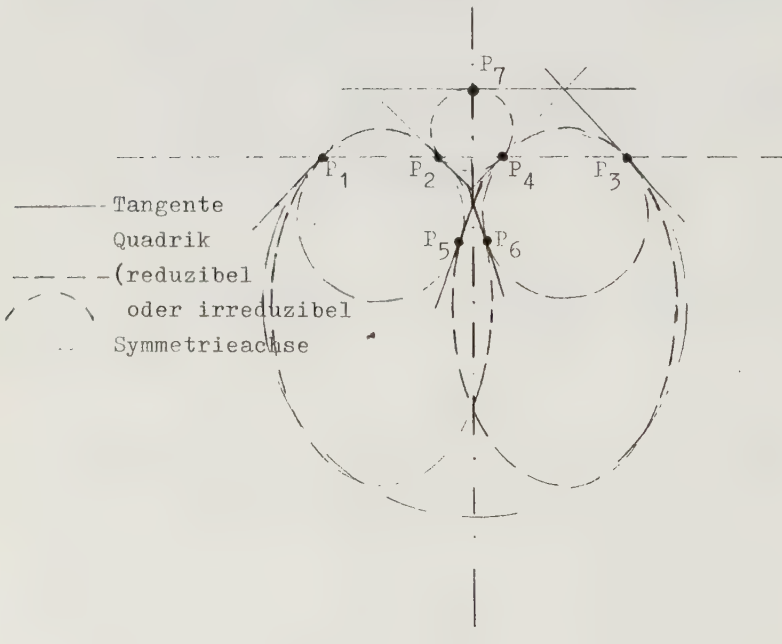
Weiter sind die drei Quartiken nicht isomorph, denn eine Isomorphie bildet die Flachpunkte $P_k^{(j)}$ von $Q_{7.3}(p_j)$ auf die Flachpunkte $P_{\sigma k}^{(j')}$ von $Q_{7.3}(p_{j'})$ ab, wobei σ einen Lagemorphismus $P_k \mapsto P_{\sigma k}$ ergibt.

Mit einem Automorphismus können wir erreichen, daß σ die Identität ist. Der Isomorphismus läßt also die Flachpunkte $P_k^j = P_k^{j'}$, $k \in \{1, 2, 5\}$, fest und ist daher die Identität, $j = j'$.

Genau dann ist eine Quartik zu einer $Q_{7.3}(p_j)$ isomorph, wenn es sieben Flachpunkte gibt, von denen vier auf einer Geraden liegen, und drei Quadriken, die die Quartik und sich gegenseitig in zwei Flachpunkten

auf der Geraden berühren, sodaß zwei davon in je einem weiteren Flachpunkt berühren und die dritte im siebten Flachpunkt einfach schneidet; außerdem dürfen auf den Geraden, die je zwei nicht auf der ersten Geraden liegende Flachpunkte verbinden, keine weiteren Flachpunkte liegen.

Dann gibt es vier weitere Quadriken, die in einem Punkt der ersten Geraden und in zwei Flachpunkten nicht auf der Geraden die Quartik berühren sowie eine Quadrik, die in den drei nicht auf der Geraden liegenden Flachpunkten berührt.



$$2.7.4 \quad \underline{T_{7,4} = (1, 1, -1, i, -i, 1, i, -i, -1, -i, -1, i, i, -i, i, \dots)}$$

Wir erhalten eine isomorphe Quartik $Q_{6,4}(p)$ mit

$$P_3 = \left(\frac{(-1-i)(p+i)(p-\frac{1}{2}-\frac{i}{2})}{p+1} : 1 : 0 \right) \quad P_5 = (1 : 1 : 1)$$

$$P_4 = \left(\frac{i(p-1)(p+i)}{p-2+i} : 1 : 0 \right) \quad P_6 = (p : \frac{1+i}{p+1} : 1).$$

Die Lagetableaus von P_1, P_2, P_5, P_7 bzw P_1, P_2, P_6, P_7 sind $(-1, -i, -i, -1)$ und $(i, -i, i, -i)$, deshalb ist

$$P_7 = (q : \frac{1-i}{q-1} : 1) \text{ und}$$

$$q \cdot \frac{1-i}{q-1} + (-1+i) \cdot q \cdot \frac{1+i}{p+1} + (-1-i) \cdot \frac{1-i}{q-1} \cdot p + p \cdot \frac{1+i}{p+1} = 0, \text{ also}$$

$$2q^2 + (-2p-1-3i)q + (2p^2 + (-1+3i)p) = 0.$$

Wir transformieren wie in 2.6.3 und erhalten als

$$\text{Bild von } P_3 \quad \left(\frac{(-1-i)p^2+2p}{p+1} : 1 : 1 \right) \text{ und als Bild von } P_7$$

$$(-q+1+i : \frac{-1+i}{q-1} : 1). \text{ Da das Lagetableau von } P_1, P_5, P_3, P_7 \\ (-i, -i, -1, -1) \text{ ist, gilt}$$

$$(-q+1+i) \cdot \frac{-1+i}{q-1} + i \cdot (-q+1+i) - i \cdot \frac{-1+i}{q-1} \cdot \frac{(-1-i)p^2+2p}{p+1} \\ - \frac{(-1-i)p^2+2p}{p+1} = 0 \quad \text{oder}$$

$$(p+1)q^2 + ((-1+i)p^2 + (-1-2i)p-1)q + ((3-i)p^2 + (-1+3i)p + (1-i)) = 0.$$

Diese beiden Gleichungen, die wir erhielten, haben 6 Lösungen (p, q) (6 Schnittpunkte der projektiven Kurven vom Grad 2 bzw 3), nämlich

$$(-i, i), \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, i \right), (1-i, 1+i) \text{ und die drei Fälle mit}$$

$$2p^3 + (-11-3i)p^2 + (10-2i)p + (-5+i) = 0,$$

$$6q = (-1-i)p^2 + (7+2i)p + (-1+2i).$$

Für $p = -i, \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, $1-i$ fällt P_3 mit P_2 bzw P_4 zusammen.

Es verbleiben nur die anderen drei Fälle.

Definition: Sei $M_{7.4} = \{p_1, p_2, p_3\}$ die Nullstellenmenge von $2p^3 + (-11-3i)p^2 + (10-2i)p + (-5+i) = 0$,
 $Q_{7.4}(p_j) = Q_{6.4}(p_j)$, $G_{7.4} = 1$, $n'(7.4) = 7$.

Die drei verschiedenen Quartiken $Q_{7.4}(p_j)$ sind nicht singulär und haben genau 7 Flachpunkte

$$P_1 = (1:0:0) \quad P_2 = (0:1:0)$$

$$P_3 = \left(\frac{(-1-i)(p_j+i)(p_j-\frac{1-i}{2})}{p_j+1} : 1:0 \right) \quad P_5 = (1:1:1)$$

$$P_4 = \left(\frac{i(p_j-1)(p_j+i)}{p_j-2+i} : 1:0 \right) \quad P_6 = (p_j : \frac{1+i}{p_j+1} : 1)$$

$$P_7 = (q_j : \frac{1-i}{q_j-1} : 1), \text{ wobei } 6q_j = (-1-i)p_j^2 + (7+2i)p_j + (-1+2i).$$

Die einzigen Lagemorphismen sind die Identität und $[P_1][P_2P_3P_4][P_7P_6P_5]$.

Denn sei ein Lagemorphismus gegeben.

Genau für $j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$ ist $(P_j P_k P_l) = 1$, deshalb bleibt $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ fest.

Wegen $(P_2 P_5 P_6) = (P_3 P_5 P_7) = (P_4 P_6 P_7) = -1 \neq (P_1 P_j P_k)$ für alle $j \neq k \in \{5, 6, 7\}$ muß P_1 festbleiben. Schalten wir eine passende Potenz des obigen Lagemorphismus nach, so können wir annehmen, daß P_2 festbleibt.

Aus $(P_1 P_2 P_j) = -1$ folgt $j=5$, deshalb wird auch P_5 auf sich abgebildet und wegen $(P_1 P_5 P_6) = -(P_1 P_5 P_7) = 1$ auch P_6 und P_7 . Aus $(P_1 P_j P_6) = (P_1 P_k P_7) = -1$ folgt $j=4$, $k=3$ und wir haben die Identität.

Jede Transformation, die zwei dieser Quartiken aufeinander abbildet (Auto- oder Isomorphismus) ist deshalb entweder die Identität oder die Transformation,

die P_1 nach P_4 , P_4 nach P_2 und P_6 nach P_5 abbildet (jeweils mit den Tangenten), also

$$\begin{pmatrix} p-2+i & -i(p-1)(p+i) & (-1+i)p^2+(-1-i)p+(2-2i) \\ 0 & (\frac{1+i}{2})(p+i)^2(p-1+i) & 0 \\ 0 & 0 & i(p+i)(p-1+i) \end{pmatrix}.$$

Unter dieser Transformation wird P_7 abgebildet nach $(\dots: \frac{-i(p+i)}{q_j-1}:1) = (\dots: \frac{1+i}{p_j+i}:1)$.

Die Quartik wird dann also in eine Quartik $Q_{7.4}(p_j)$ transformiert mit

$$6p_j = 6\left(\frac{1+i}{\frac{p_j+i}{q_j-1}} - i\right) = (1-5i)p_j^2 + (-16+25i)p_j + (16-11i).$$

Die quadratische Gleichung, die sich für $p_{j,1} = p_j$ ergibt, ist im Widerspruch zur kubischen Gleichung für p_j . Daher ist $p_{j,1} \neq p_j$, die drei Werte p_1, p_2, p_3 und damit die Quartiken $Q_{7.4}(p_j)$ werden durch die Transformation zyklisch vertauscht, sie sind also isomorph.

Gleichzeitig haben wir bewiesen, daß diese Quartiken nur den identischen Automorphismus besitzen.

Setzen wir

$$P'_1 = P_1 \quad P'_2 = P_2 \quad P'_3 = P_4 \quad P'_4 = P_3 \quad P'_5 = P_5 \quad P'_6 = P_7 \quad P'_7 = P_6,$$

so haben $P'_1, \dots, P'_7$ das Lagetableau $\overline{T}_{7.4}$, also das komplex konjugierte.

Die konjugierte Quartik (d.h. die Quartik mit den Punkten mit konjugierten Koordinaten, sie wird durch das konjugierte Polynom beschrieben) hat also wieder das Lagetableau $T_{7.4}$.

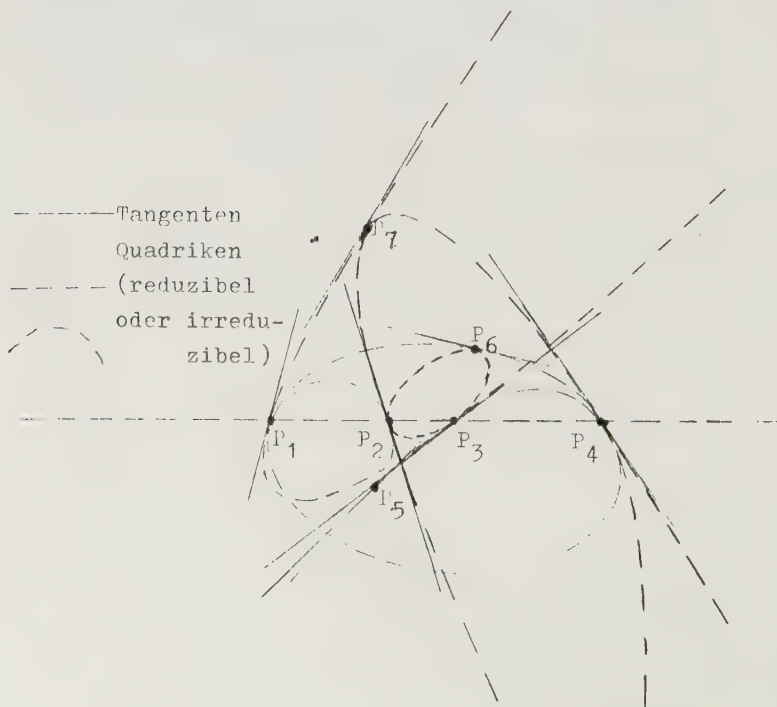
Da wir nur drei Quartiken haben, muß es eine geben,

die bei obiger (offensichtlich involutorischer) Operation festbleibt.

Sie besitzt einen antianalytischen Automorphismus $(x:y:z) \mapsto (\bar{x}:\bar{y}:\bar{z})$, ihre Gleichung kann also reell geschrieben werden.

Sei $Q_{7.4}(p_1)$ diese Quartik. Wir können $M_{7.4} = \{p_1\}$ setzen.

Genau dann ist eine Quartik isomorph zur $Q_{7.4}(p_1)$, wenn sie 7 Flachpunkte besitzt, so daß p_1, p_2, p_3, p_4 auf einer Geraden liegen; von den sechs Quadriken, die die Quartik in p_j, p_k, p_l berühren ($1 \leq j \neq k \leq 4, 5 \leq l \leq 7$), keine zwei durch die gleichen Punkte auf der Geraden gehen und auf den Geraden $p_j p_k$ ($5 \leq j \neq k \leq 7$) keine weiteren Flachpunkte liegen.



$$2.7.5 \quad \underline{T_{7,5} = (-1, -1, -1, -1, i, i, i, i, i, -i, -i, -1, -1, -1, i, \dots)}$$

Wir erhalten eine isomorphe Quartik $Q_{6,5}(p)$ mit

$$P_3 = (1:1:1) \quad P_4 = (-i:-i:1)$$

$$P_5 = (p:p':1) \quad P_6 = (p':p:1) \text{ und Automorphismen}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} p & p' & -2pp' \\ p' & p & -2pp' \\ 1 & 1 & -p-p' \end{pmatrix}, \text{ wobei}$$

$$p' = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) \frac{p-1+i}{p-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}, \text{ sie erzeugen die Permutationen}$$

$$[P_1 P_2][P_3][P_4][P_5 P_6] \text{ und } [P_1 P_5][P_2 P_6][P_3 P_4].$$

Die Lagetables von P_1, P_2, P_j, P_7 für $j = 3, 4, 5, 6$ sind $(-1, i, i, -1), (-1, i, -1, -i), (-1, i, -1, -i), (-1, i, i, -1)$.

$$\text{Daher ist } P_7 = (q: \frac{1+i}{q+i}: 1) \text{ und}$$

$$q \cdot \frac{1+i}{q+i} - i \cdot q \cdot (-i) + (-1+i) \cdot (-i) \cdot (-i) = 0, \text{ also}$$

$$q = 1 - \frac{i}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{7}, \quad P_7 = (1 - \frac{i}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{7}: \frac{1-i \pm \frac{i}{2} \sqrt{7}}{2}: 1), \text{ weiter}$$

$$q \cdot \frac{1+i}{q+i} - i \cdot q \cdot p' + (-1+i) \cdot p \cdot p' = 0 \text{ und}$$

$$q \cdot \frac{1+i}{q+i} + i \cdot \frac{1+i}{q+i} \cdot p' + (-1-i) \cdot p \cdot p' = 0, \text{ aus diesen beiden}$$

$$i qp' + i \frac{1+i}{q+i} p' - 2ipp' = 0, \text{ wegen } p' \neq 0 \text{ ist also}$$

$$p = \frac{1}{2} \left(q + \frac{1+i}{q+i} \right) = \frac{3}{4} - \frac{3i}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{7} \pm \frac{i}{4} \sqrt{7} = \left(\frac{3 \pm i}{4} \sqrt{7} \right) (1-i)$$

$$p' = \frac{p-1+i}{(1+i)p-1} = \frac{3}{8} - \frac{3i}{8} \pm \frac{1}{8} \sqrt{7} \pm \frac{i}{8} \sqrt{7} = \frac{p}{2}.$$

$$\text{Nach 2.5.2 ist } \frac{a_{112}}{a_{004}} = \frac{-2ip^2+2}{p(p-1+i)} = -\frac{9i}{4} \pm \frac{3}{4} \sqrt{7},$$

$$a_{211} = a_{121} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) a_{112},$$

$$a_{310} = a_{130} = \frac{i}{4} a_{112} - \frac{1}{2} a_{004} \text{ und } a_{220} = \frac{i}{2} a_{112}.$$

Definition: Sei $Q_{7,5}(\pm\sqrt{7}) = Q_{6,5}(\frac{3}{4}-\frac{3i+1}{4}\sqrt{7}+\frac{i}{4}\sqrt{7}) =$
 $= \{(6\pm 2i\sqrt{7})Z^4 - 24XYZ^2 + (-12+12i)X^2YZ + (-12+12i)XY^2Z +$
 $+ (3\mp i\sqrt{7})X^3Y + 12X^2Y^2 + (3\mp i\sqrt{7})XY^3 = 0\},$
 $M_{7,5} = \{\pm\sqrt{7}\}, \quad G_{7,5} = D_4, \quad n'(7,5) = 8.$

Jede Quartik $Q_{7,5}(\pm\sqrt{7})$ ist nichtsingulär und hat genau 8 Flachpunkte

$$P_1 = (1:0:0) \quad P_2 = (0:1:0) \quad P_3 = (1:1:1) \quad P_4 = (-1:-1:1)$$

$$P_5 = ((\frac{3}{4}+\frac{i}{4}\sqrt{7})(1-i):(\frac{3}{8}+\frac{i}{8}\sqrt{7})(1-i):1)$$

$$P_6 = ((\frac{3}{8}+\frac{i}{8}\sqrt{7})(1-i):(\frac{3}{4}+\frac{i}{4}\sqrt{7})(1-i):1)$$

$$P_7 = (1-\frac{i}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{7}:1-\frac{i}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{7}:1) \quad P_8 = (\frac{1}{2}-i+\frac{1}{2}\sqrt{7}:1-\frac{i}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{7}:1)$$

Die angegebenen Automorphismen erzeugen die Permutationen $[P_1P_2][P_3][P_4][P_5P_6][P_7P_8]$ (wegen $(P_1P_2P_7) = i$ kann P_7 nicht fest bleiben) und $[P_1P_5][P_2P_6][P_3P_4][P_7][P_8]$ (wegen $(P_5P_6P_8) = (P_6P_5P_7) = -i \neq (P_1P_2P_7)$ bleiben P_7 und P_8 fest).

Das Lagetableau von P_1, P_6, P_7, P_3 ist $(i, -i, -i, i)$,

deshalb gibt es einen Automorphismus, der

$$[P_1P_6][P_3P_7] \text{ induziert, nämlich}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & (3+i\sqrt{7})(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}) \\ (3+i\sqrt{7})(\frac{1}{4}+\frac{i}{4}) & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Er erzeugt die Permutation $[P_1P_6][P_2][P_5][P_3P_7][P_4P_8]$.

Deshalb gibt es eine Automorphismengruppe, die zur D_4 isomorph ist.

Mit diesen Automorphismen erhalten wir für die 8 Flachpunkte das Lagetableau

$$(-1, -1, -1, -1, i, -i, i, i, i, i, -1, -i, -i, -1, -i, -1, -1, -1, \\ i, -i, -i, \dots)$$

Sei nun ein beliebiger Lagemorphismus gegeben.

P_1, P_2, P_5, P_6 und P_3, P_4, P_7, P_8 sind die einzigen

Punktequadrupel, die das Lagetableau $(-1, -1, -1, -1)$ haben, daher wird $\{P_3, P_4, P_7, P_8\}$ oder $\{P_1, P_2, P_5, P_6\}$

auf letztere abgebildet. Wir schalten einen geeigneten Automorphismus nach und erreichen so, daß

P_1 oder P_3 auf P_1 abgebildet werden. Im ersten Fall bleiben P_1 und $\{P_3, P_4, P_7, P_8\}$ fest, mit

$[P_1][P_6][P_2P_5][P_3P_8][P_4P_7]$ können wir erreichen, daß

das Bild von P_3 wieder P_3 oder P_4 ist.

Da für $j \in \{3, 4\}$ $(P_1P_5P_j) \neq (P_1P_2P_j) = -1 \neq (P_1P_6P_j)$,

wird P_2 auf sich abgebildet, wegen $(P_1P_2P_7) = i = -(P_1P_2P_8)$

sind die Menge $\{P_3, P_4\}$ sowie P_7 und P_8 fest, mit

$(P_1P_3P_4) = i = (P_5P_6P_7)$ erhalten wir die Identität.

Wird P_3 auf P_1 abgebildet, so auch $\{P_1, P_2, P_5, P_6\}$ auf $\{P_3, P_4, P_7, P_8\}$ und wie oben können wir erreichen, daß

P_1 nach P_3 oder P_4 geht. Dann ist P_2 das Bild von

P_8 ($(P_3P_jP_5) \neq (P_3P_jP_1) = -1 = (P_3P_jP_6) \neq (P_3P_jP_2)$ für

$j \in \{4, 7, 8\}$ folgt $j=8$) und P_4 wird nach P_6 , P_7 nach P_5

abgebildet ($(P_3P_4P_j) \in \{\pm i\}$ für $j \in \{1, 2, 5, 6\}$, P_4 ist der

einzige solche Punkt, P_7, P_8 und P_1, P_6 und P_2, P_5 sind entsprechende Paare), außerdem geht P_6 dann ebenfalls

nach P_3 oder P_4 . Wegen $(P_1P_3P_6) = i = (P_4P_1P_3) \neq (P_3P_1P_4)$

wird P_1 nach P_4 und P_6 nach P_3 abgebildet.

Mit $(P_1P_4P_8) = (P_3P_1P_5) \neq (P_3P_1P_2)$ erhalten wir

$[P_1P_4P_6P_3][P_2P_7P_5P_8]$.

Diejenige Transformation, die P_3, P_8, P_6 nach $P_1, P_2,$

P_3 (mit Tangenten) abbildet, ist

$$\begin{pmatrix} 1 & (3\mp\sqrt{7})(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}) & \frac{1}{2}+\frac{3i}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{7}+\frac{i}{2}\sqrt{7} \\ 1 & 1 & -2 \\ i & \frac{3}{4}-\frac{i}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{7}+\frac{i}{4}\sqrt{7} & (3\pm i-\sqrt{7})(-\frac{1}{4}-\frac{i}{4}) \end{pmatrix}, \text{ hierunter}$$

wird P_2 nach $(1-\frac{i}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{7}:\frac{1}{2}-i\mp\frac{1}{2}\sqrt{7}:1)$, also nicht nach P_7 abgebildet.

Folglich ist die D_4 die volle Automorphismengruppe.

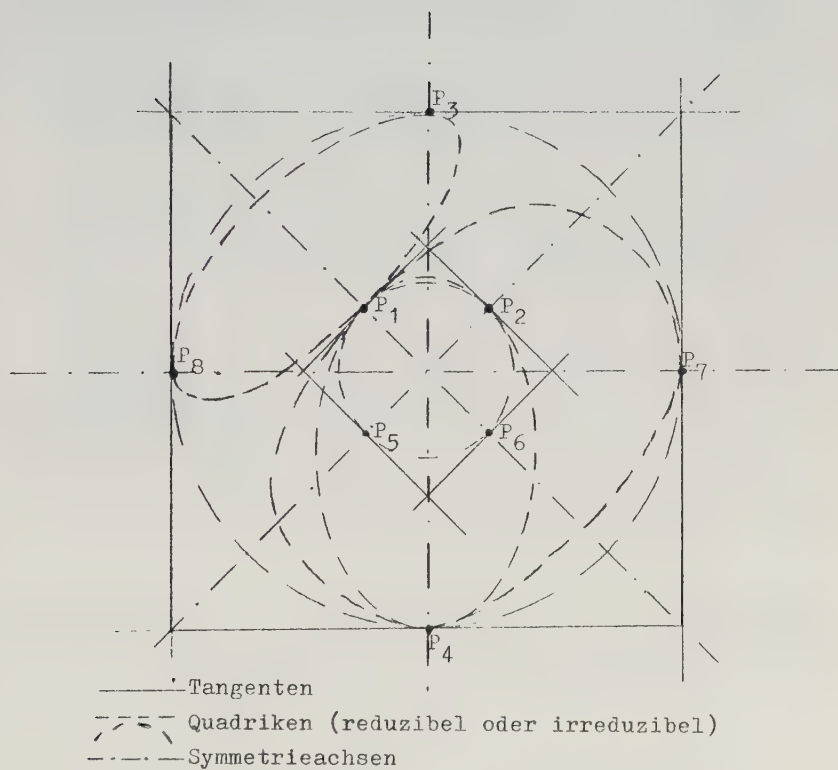
Das Bild der Quartik unter der Transformation ist eine Quartik mit dem gleichen Lagetableau und daher wieder eine $Q_{7.5}(\pm\sqrt{7})$, da es nicht dieselbe ist, sind beide isomorph.

Wir können also $M_{7.5} = \{\sqrt{7}\}$ definieren.

Die antianalytische Abbildung $(x:y:z) \mapsto (-i\bar{x}:-i\bar{y}:\bar{z})$ führt die Quartik in die andere Quartik über. Mit Hilfe des Isomorphismus ergibt sich ein anti-analytischer Automorphismus.

Genau dann ist eine Quartik isomorph zur $Q_{7.5}(\sqrt{7})$, wenn sie sieben Flachpunkte besitzt, von denen keine drei kollinear sind (siehe 2.7).

Dann gibt es zwei disjunkte Quadrupel von Flachpunkten, die Berührquadriken besitzen.



2.8 Quartiken mit 8 Flachpunkten

Seien $P_1, \dots, P_8$ Flachpunkte einer nichtsingulären Quartik.

Kommt der Wert 1 im Lagetableau vor, so haben oBdA $P_1, \dots, P_7$ das Lagetableau $T_{7.1}$ oder $T_{7.2}$ (bei $T_{7.3}$ und $T_{7.4}$ gibt es ja nur 7 Flachpunkte).

Liegt $T_{7.2}$ vor, so gibt es nach 2.6.2 8 Flachpunkte mit Lagetableau $T_{8.2}$ (siehe 2.8.2).

Haben wir das Lagetableau $T_{7.1}$, so ist $(P_1 P_j P_8) = -1$ für ein $j \in \{2, 3, 4\}$. Wir können mit der Umbenennung, die aus dem Lagemorphismus $[P_1][P_2 P_3 P_4][P_5 P_6 P_7]$ hervorgeht, erreichen, daß $j=4$.

Dann sind $(P_1 P_2 P_8)$ und $(P_1 P_3 P_8)$ voneinander und von -1 verschieden, P_8 liegt nicht auf der Geraden $\overline{P_1 P_5 P_6 P_7}$, also $1 \neq (P_1 P_j P_8) \neq (P_1 P_k P_8)$ für $j \neq k \in \{5, 6, 7\}$.

In der Tabelle auf der nächsten Seite werden die möglichen Fälle angegeben.

In Nr 1, 5, 6, 10 und 12 liegt P_8 auf zwei Geraden $\overline{P_j P_k}$ und $\overline{P_j P_1}$, ist also gleich P_j .

Mit $P'_1 = P_1$ $P'_2 = P_6$ $P'_3 = P_7$ $P'_4 = P_5$ $P'_5 = P_3$ $P'_6 = P_4$ $P'_7 = P_2$ $P'_8 = P_8$ erhalten wir aus Nr 2, 7, 8 die Nr 11, 3, 9.

In Nr 3 gibt es einen Flachpunkt P_9 auf $\overline{P_2 P_6 P_8}$.

Für ihn gilt wegen $(P_6 P_j P_2) \neq (P_9 P_j P_2) \neq (P_8 P_j P_2)$ für $j \in \{1, 3\}$

$(P_1 P_2 P_9) = -1$, $(P_2 P_3 P_9) = i$, also $(P_1 P_3 P_9) = -i$

und wegen $(P_2 P_j P_6) \neq (P_9 P_j P_6) \neq (P_8 P_j P_6)$ für $j \in \{1, 7\}$

$(P_1 P_6 P_9) = (P_6 P_7 P_9) = -i$, also $(P_1 P_7 P_9) = -1$.

(weiter übernächste Seite)

$(P_1 P_2 P_8)$	i						-i					
$(P_1 P_3 P_8)$	-i						i					
$(P_1 P_4 P_8)$	-1						-1					
$(P_2 P_3 P_8)$	-1						-1					
$(P_2 P_4 P_8)$	i						-i					
$(P_3 P_4 P_8)$	-i						i					
$(P_1 P_5 P_8)$	-1	i	-i	-1	-1	i	-1	i	-i	-1	-i	-1
$(P_2 P_5 P_8)$	-i	-1	1	-i	1	-1	-i	1	-1	-i	1	-1
$(P_3 P_5 P_8)$	1	-i	i	-1	-1	i	1	-i	i	-1	-1	1
$(P_4 P_5 P_8)$	-i	-1	1	-i	-1	1	-i	-1	1	-i	-1	1
$(P_1 P_6 P_8)$	i	-i	-1	-i	-1	i	i	-i	-1	-i	-1	i
$(P_2 P_6 P_8)$	-i	i	1	i	1	-i	-i	1	-1	-i	-1	i
$(P_3 P_6 P_8)$	1	-1	i	-1	i	1	-1	1	-i	1	-i	-1
$(P_4 P_6 P_8)$	1	-1	i	-1	i	1	1	-1	i	-1	i	1
$(P_5 P_6 P_8)$	-i	i	i	-1	-i	-1	-i	i	1	-1	-i	-1
$(P_1 P_7 P_8)$	-i	i	-i	-1	i	-1	-i	i	-i	-1	i	-1
$(P_2 P_7 P_8)$	-i	i	-i	-1	i	-1	i	-i	i	1	-i	1
$(P_3 P_7 P_8)$	-i	i	-i	-1	i	-1	i	-i	i	1	-i	1
$(P_4 P_7 P_8)$	-i	i	-i	-1	i	-1	-i	i	-i	-1	i	-1
$(P_5 P_7 P_8)$	i	-i	-1	i	-1	-i	i	-i	-1	i	-1	-i
$(P_6 P_7 P_8)$	-1	-1	1	-i	-i	i	-1	-1	i	-i	-i	i
Nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Mit $P_1' = P_1$ $P_2' = P_3$ $P_3' = P_4$ $P_4' = P_2$ $P_5' = P_6$ $P_6' = P_7$ $P_7' = P_5$ $P_8' = P_9$

erhalten wir daraus den Fall 11.

In Nr 4 haben $P_1, P_4, P_2, P_3, P_7, P_8$ das Lagetableau $T_{6.2}$.

Daher hat die Quartik 8 Flachpunkte mit Lagetableau $T_{8.2}$, siehe 2.8.2.

In Nr 11 ist das Lagetableau von P_1, P_3, P_7, P_8 gleich

$(-i, i, i, -i)$, daher gibt es einen Automorphismus, der

$\begin{bmatrix} P_1 P_3 \\ P_7 P_8 \end{bmatrix}$ induziert. Deshalb liegen auf der Geraden

$\overline{P_7 P_8}$ 4 Flachpunkte.

Wegen $(P_j P_7 P_8) \neq 1$ für $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ haben wir wieder

acht Flachpunkte mit Lagetableau $T_{8.2}$, siehe 2.8.2.

Nr 9 wird in 2.8.1 behandelt.

Gibt es den Wert 1 im Lagetableau nicht, so gibt es 7 Flachpunkte, die das Lagetableau $T_{7.5}$ haben.

Nach 2.7.5 haben dann die 8 Flachpunkte dieser Quartik das dort angegebene Lagetableau (siehe 2.8.3)

Hat eine nichtsinguläre Quartik genau 8 Flachpunkte, so hat sie eines der Lagetableaus $T_{8.2}$ oder $T_{8.3}$ (denn bei $T_{8.1}$ gibt es 9 Flachpunkte).

In $T_{8.2}$ gibt es jedoch den Wert 1, in $T_{8.3}$ nicht, daher können sie durch keine Permutation der Flachpunkte ineinander übergeführt werden.

$$2.8.1 \quad \underline{T_{8,1}} = \frac{(1, 1, -1, -i, i, -i, 1, i, -1, -i, i, -i, i, -1, -1, \\ 1, 1, i, 1, -1, -i, \dots)}{}$$

Wir haben eine isomorphe Quartik $Q_{7,1}(p)$ mit

$$P_6 = (p:1:1) \quad P_7 = (ip + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}:1:1).$$

Wegen $(P_2 P_5 P_8) = 1$ ist $P_8 = (1:q:1)$.

Aus den Lagetables (i, -i, -i, i) und (-i, -i, -1, -1) von P_1, P_2, P_7, P_8 und P_1, P_2, P_6, P_8 erhalten wir

$$1 \cdot q - (ip + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}) \cdot 1 = 0, \text{ also } q = ip + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \text{ und dann}$$

$$1 \cdot (ip + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}) + i \cdot 1 \cdot 1 - i \cdot (ip + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}) \cdot p - p \cdot 1 = 0,$$

$$p^2 + (-\frac{3}{2} + \frac{i}{2})p + (\frac{1}{2} + \frac{i}{2}) = 0,$$

$$p_j = \frac{3}{4} - \frac{i}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{7} \mp \frac{i}{4} \sqrt{7}, \quad q_j = \frac{3}{4} + \frac{i}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{7} \mp \frac{i}{4} \sqrt{7} = \overline{p_j} \quad \text{für } j \in \{1, 2\}.$$

Diese Quartiken haben nach 2.6.1 einen Automorphismus, der P_1 festläßt und P_2 mit P_5 vertauscht (Tangenten werden auf Tangenten abgebildet). Da P_8 auf der Geraden $\overline{P_2 P_5}$ liegt und $(P_1 P_2 P_5) = -1$, gibt es auch einen Automorphismus, der P_5 festläßt und P_1 mit P_2 vertauscht. Es gibt also Automorphismen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ sie induzieren die}$$

Permutationen $[P_1][P_2 P_5][P_3 P_6][P_4 P_7][P_8 P_9]$ und $[P_1 P_2][P_3 P_4][P_5][P_6 P_9][P_7 P_8]$, durch sie ist P_9 bestimmt.

Definition: Sei $Q_{8,1}(\pm \sqrt{7}) = Q_{7,1}(\frac{3}{4} - \frac{i}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{7} \mp \frac{i}{4} \sqrt{7})$,

$$M_{8,1} = \{ \pm \sqrt{7} \}, \quad G_{8,1} = D_3, \quad n'(8.1) = 9.$$

Die Quartik $Q_{8,1}(\pm \sqrt{7}) = \{ (3 \pm \sqrt{7})Z^4 + (-10 \mp 2\sqrt{7})XYZ^2 + 6X^2YZ + 6XY^2Z - 2X^3Y + (-1 \pm \sqrt{7})X^2Y^2 - 2XY^3 = 0 \}$ ist

nicht singular und hat genau 9 Flachpunkte

$$P_1 = (1:0:0) \quad P_2 = (0:1:0) \quad P_3 = ((1 \pm i\sqrt{7})(-\frac{1}{4} - \frac{i}{4}):1:0)$$

$$P_4 = ((1 \mp i\sqrt{7})(-\frac{1}{4} + \frac{i}{4}):1:0) \quad P_5 = (1:1:1)$$

$$P_6 = (\frac{3}{4} - \frac{i}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{7} - \frac{i}{4}\sqrt{7}:1:1) \quad P_7 = (\frac{3}{4} + \frac{i}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{7} + \frac{i}{4}\sqrt{7}:1:1)$$

$$P_8 = (1:\frac{3}{4} + \frac{i}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{7} + \frac{i}{4}\sqrt{7}:1) \quad P_9 = (1:\frac{3}{4} - \frac{i}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{7} - \frac{i}{4}\sqrt{7}:1)$$

mit dem verkürzten Lagetableau

$$(1, 1, -1, -i, i, -i, i, 1, i, -1, -i, i, -1, -i, i, -1, -1, -i, 1, 1, i, -i, 1, -1, i, -i, -1, -1, \dots)$$

sowie Automorphismen wie oben angegeben, sie erzeugen die $D_3 \cong S_3$, sie wirkt auf P_1, P_2, P_5 wie die S_3 .

Jeder Lagemorphismus kann mit einem Automorphismus so abgeändert werden, daß er P_1, P_2, P_5 festläßt.

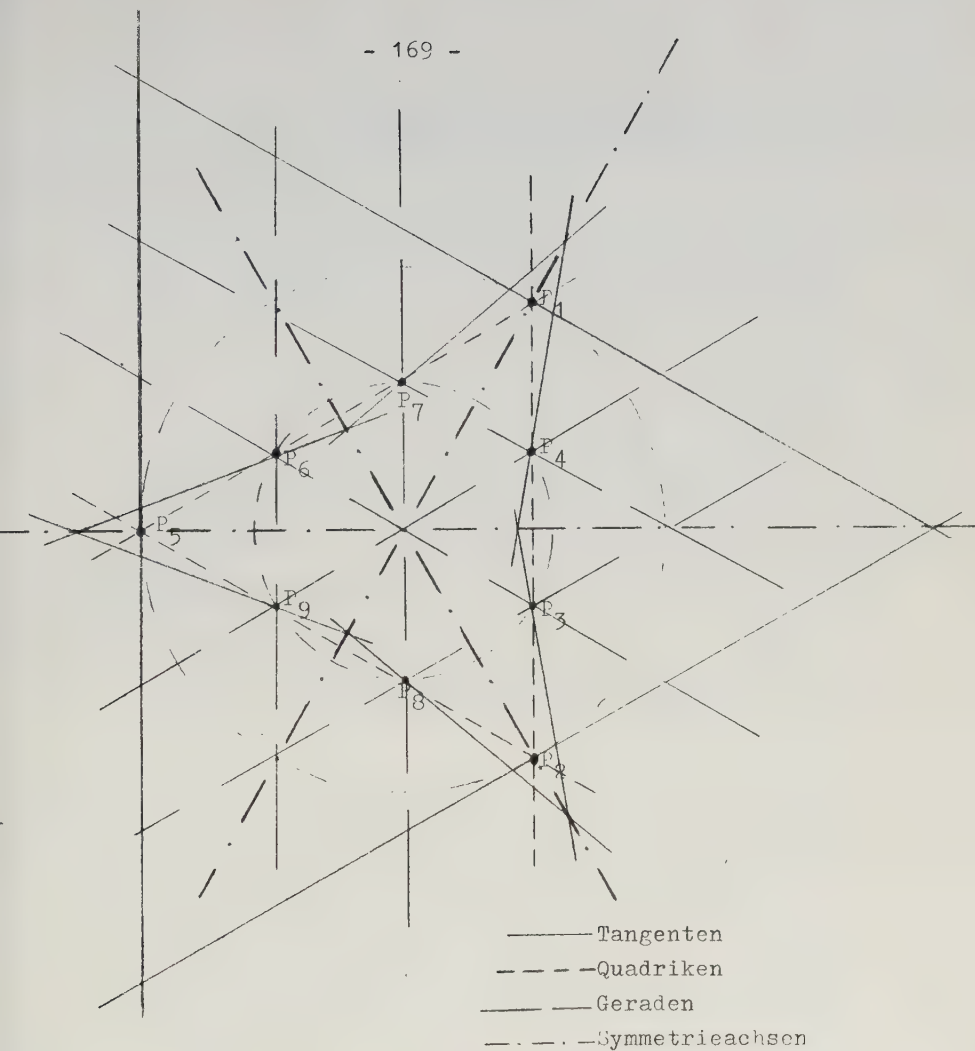
Dann bleiben auch $\{P_3, P_4\}$ sowie $\{P_6, P_7\}$ und $\{P_8, P_9\}$ fest. Wegen $(P_1 P_2 P_8) \neq (P_1 P_2 P_9)$ und analogem ist der Lagemorphismus die Identität.

$G_{8,1}$ ist deshalb die volle Automorphismengruppe.

Die beiden Quartiken (für die beiden Vorzeichen von $\sqrt{7}$) sind nicht isomorph, denn jede Isomorphie kann mit einem Automorphismus so abgeändert werden, daß sie P_1, P_2, P_5 samt ihren Tangenten festläßt, dann ist sie bereits die identische Transformation.

Die Abbildung $(x:y:z) \mapsto (\bar{x}:\bar{y}:\bar{z})$ ist offensichtlich ein antianalytischer Automorphismus.

Genau dann ist eine Quartik zu $Q_{8,1}(\pm\sqrt{7})$ isomorph, wenn es drei Geraden gibt, die 9 Flachpunkte ausschneiden, und keine weiteren Flachpunkte.



Die sechs Flachpunkte, die nicht auf zwei der drei Geraden gleichzeitig liegen, liegen auf einer Quadrik.

$$2.8.2 \quad \underline{T_{8.2} = (1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, i, i, i, i, -i, -i, -i, -i, -1, i, -i, -i, i, -1, \dots)}$$

Es gibt eine isomorphe Quartik $Q_{7.2}(p)$.

Jede solche Quartik hat acht Flachpunkte mit dem angegebenen Lagetableau.

Definition: $Q_{8.2}(p) = Q_{7.2}(p)$, $M_{8.2} = M_{7.2}$,

$$G_{8.2} = G_{7.2} = D_4, \quad n'(8.2) = 8.$$

Jede solche Quartik hat acht Flachpunkte und eine Automorphismengruppe D_4 wie in 2.6.2 angegeben.

Dort wurde auch eine Quartik mit genau 8 Flachpunkten genannt.

Die geometrische Bedingung findet sich in 2.7.2.

$$2.8.3 \quad \underline{T_{8.3}} = \underline{(-1, -1, -1, -1, i, -i, i, i, i, i, -1, -i, -i, -1, -i, -1, -1, -1, i, -i, -i, \dots)}$$

Es gibt eine isomorphe Quartik $Q_{7.5}(\sqrt{7})$ (siehe 2.7.5).

Definition: $Q_{8.3}(\sqrt{7}) = Q_{7.5}(\sqrt{7})$, $M_{8.3} = M_{7.5} = \{\sqrt{7}\}$,

$$G_{8.3} = G_{7.5} = D_4, \quad n'(8.3) = 8.$$

Diese Quartik hat genau 8 Flachpunkte und die Automorphismengruppe isomorph zur D_4 sowie einen antianalytischen Automorphismus wie in 2.7.5 beschrieben.

2.9 Quartiken mit 9 Flachpunkten

Seien $P_1, \dots, P_9$ Flachpunkte einer nichtsingulären Quartik.

Dann haben oBdA $P_1, \dots, P_8$ eines der Lagetableaus $T_{8.1}$ oder $T_{8.2}$ (denn bei $T_{8.3}$ gibt es nur 8 Flachpunkte).

Im ersten Fall gibt es nach 2.8.1 genau neun Flachpunkte mit dem dort angegebenen Lagetableau (siehe 2.9.1).

Haben wir $T_{8.2}$ vorliegen, so gibt es eine isomorphe Quartik $Q_{8.2}(p)$ und Automorphismen, die

$[P_1 P_5][P_2 P_6][P_3 P_7][P_4 P_8]$ und $[P_1 P_3 P_2 P_4][P_5 P_8 P_6 P_7]$ induzieren sowie einen Lagemorphismus $[P_1][P_2][P_3][P_4][P_5 P_8 P_6 P_7]$.

Die drei entsprechenden Umbenennungen lassen daher $T_{8.2}$ fest und wir können $(P_1 P_2 P_9) \in \{-1, i\}$ annehmen.

Weiter ist $(P_1 P_2 P_9) \neq (P_1 P_3 P_9) \neq (P_1 P_4 P_9) \neq (P_1 P_2 P_9)$.

Nach 1.6 wird durch P_1, P_2, P_3 , $(P_1 P_3 P_9)$ und $(P_2 P_3 P_9)$ eine Gerade festgelegt, auf der P_9 liegen muß, und zwar wird sie durch die Gleichung

$$(1 - (P_2 P_3 P_9))X + (1 - (P_1 P_3 P_9))ipY - (1+i)(p+1)Z = 0$$

gegeben.

Ist $(P_1 P_2 P_9) = -1$, so folgt $(P_1 P_3 P_9) = -(P_2 P_3 P_9) \in \{\pm i\}$.

Für $+i$ läge also P_9 auf der Geraden

$$\{X + pY - (p+1)Z = 0\} = \overline{P_5 P_6 P_7 P_8}.$$

Für $(P_1 P_3 P_9) = -i$ liegt P_9 auf der Geraden

$$\{X - pY - i(p+1)Z = 0\}.$$

Dann ist $(P_1 P_2 P_9) = -1$, $(P_1 P_4 P_9) = -(P_2 P_4 P_9) = i$ und

analog muß P_9 auf der Geraden

$$\{X - pY + i(p+1)Z = 0\} \text{ liegen.}$$

Da P_9 nicht auf $\{Z = 0\}$ liegen kann, muß dann $p = -1$ sein, alle Flachpunkte mit $(P_1 P_2 P_j) = -1$, $j \geq 9$, liegen auf dieser Geraden.

Diese Quartik $Q_{8,2}(-1) = \{2Z^4 - X^3Y - XY^3 = 0\}$ hat einen

Automorphismus $\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & -1-i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, der die Permutation

$[P_1][P_2][P_3 P_4][P_5 P_9 P_7 P_{11} P_6 P_{10} P_8 P_{12}]$ auf den Flachpunkten induziert ($P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}$ sind dadurch definiert).

Deshalb haben $P_1, \dots, P_9$ das Lagetableau $T_{9,2}$

(siehe 2.9.2) (Aus der Gleichung

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-1-i}{\sqrt{2}} + (-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}) \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} + (-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}) \cdot \frac{-1-i}{\sqrt{2}} + i = 0 \text{ und}$$

$$P_9 = (\frac{1+i}{\sqrt{2}} : \frac{-1-i}{\sqrt{2}} : 1) \text{ erhalten wir zB } (P_1 P_5 P_9) = -i).$$

Sei jetzt $(P_1 P_2 P_9) = i$, dann ist $(P_1 P_3 P_9) = i(P_2 P_3 P_9) \in \{-1, -i\}$.

Sei zunächst $(P_1 P_3 P_9) = -1$.

Wir haben für $j \in \{5, 6, 7, 8\}$

$$(P_4 P_j P_9) = \frac{(P_1 P_4 P_j)(P_1 P_j P_9)}{(P_1 P_4 P_9)} = (P_1 P_j P_9), \text{ also darf das nicht}$$

1 werden.

Ist $(P_1 P_j P_9) = i$ ($-i$), so ist $(P_3 P_j P_9) = 1$ ($(P_2 P_j P_9) = 1$).

Daher ist dann für $j \neq k \in \{5, 6, 7, 8\}$ $(P_1 P_k P_9) \neq i$ ($-i$).

Also gibt es $j \neq k \in \{5, 6, 7, 8\}$ mit $(P_1 P_j P_9) = (P_1 P_k P_9) = -1$.

Ist nun $(P_1 P_5 P_9) = (P_1 P_6 P_9) = -1$, so ergibt sich aus

den Lagetableaus von P_1, P_2, P_5, P_9 und P_1, P_2, P_6, P_9 ,

nämlich $(-1, i, -1, i)$, daß P_9 auf den Quadriken

$\{XY - iXZ + (-1+i)Z^2 = 0\}$ und
 $\{XY - i \cdot \frac{1}{p}XZ + (-1+i) \cdot p \cdot \frac{1}{p} = 0\}$ liegt. Da P_9 von P_1 und
 P_2 verschieden ist, geht das nur, wenn beide Qua-
 driken übereinstimmen, nämlich für $p=1$, dann ist aber
 $P_5 = P_6$.

Mittels der letzten Umbenennung sehen wir, daß genauso
 $(P_1P_7P_9) = (P_1P_8P_9) = -1$ nicht möglich ist.

Mit der letzten Umbenennung erreichen wir deshalb
 $\{j,k\} = \{6,8\}$. Dann ist

$$(P_1P_5P_9) = \frac{(P_1P_5P_8)(P_1P_8P_9)}{(P_5P_8P_9)} = \frac{i}{(P_5P_8P_9)} \neq i \text{ und}$$

$-1 \neq (P_1P_7P_9) \neq (P_1P_5P_9) \neq -1$, also

$$(P_1P_5P_9) = -i = -(P_1P_7P_9).$$

Dies wird in 2.9.3 behandelt.

Ist weiter $(P_1P_2P_9) = i$, aber $(P_1P_3P_9) = -i$, so ist

$(P_4P_3P_9) = i$, $(P_4P_1P_9) = -1$. Die Umbenennung

$P'_1 = P_4$ $P'_2 = P_3$ $P'_3 = P_1$ $P'_4 = P_2$ $P'_j = P_j$ sonst

führt diesen Fall in obigen über.

Wir werden sehen, daß es nur in 2.9.1 genau 9 Flach-
 punkte gibt.

$$2.9.1' \quad \underline{T_{9.1}} = \underline{(1, 1, -1, -i, i, -i, i, 1, i, -1, -i, i, -1, -i, i, -1, -1, -i, 1, 1, i, -i, 1, -1, i, -i, -1, -1, \dots)}$$

Wir haben eine isomorphe Quartik $Q_{8.1}(\pm\sqrt{7})$.

Definition: $Q_{9.1}(\pm\sqrt{7}) = Q_{8.1}(\pm\sqrt{7})$, $M_{9.1} = M_{8.1} = \{\pm\sqrt{7}\}$,

$$G_{9.1} = G_{8.1} = D_3, \quad n'(9.1) = 9.$$

Jede dieser nichtsingulären Quartiken hat genau 9 Flachpunkte und die volle Automorphismengruppe isomorph zu D_3 sowie einen antianalytischen Automorphismus wie in 2.8.1 angegeben.

Sie lassen sich durch reelle Polynome darstellen.

$$2.9.2 \quad \underline{T_{9,2} = (1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, i, i, i, i, -i, -i, -i, -i, -i, i, -1, i, -i, -i, -i, i, -i, -1, i, i, i, \dots)}$$

In 2.9 zeigten wir, daß die Quadrik isomorph zur $Q_{8,2}(-1)$ ist.

Definition: Sei $Q_{9,2}(0) = Q_{8,2}(-1)$, $M_{9,2} = \{O\}$,

$G_{9,2}$ die weiter unten definierte Gruppe, $n'(9.2) = 12$.

Diese Quartik $Q_{9,2}(0) = \{2Z^4 - X^3Y - XY^3 = 0\}$ ist nicht-singulär und hat die 12 Flachpunkte

$$\begin{aligned} P_1 &= (1:0:0) & P_2 &= (0:1:0) & P_3 &= (i:1:0) & P_4 &= (-i:1:0) \\ P_5 &= (1:1:1) & P_6 &= (-1:-1:1) & P_7 &= (-i:-i:1) & P_8 &= (i:i:1) \\ P_9 &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}:\frac{-1-i}{\sqrt{2}}:1\right) & P_{10} &= \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}:\frac{1+i}{\sqrt{2}}:1\right) \\ P_{11} &= \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}:\frac{1-i}{\sqrt{2}}:1\right) & P_{12} &= \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}:\frac{-1+i}{\sqrt{2}}:1\right) \end{aligned}$$

mit dem verkürzten Lagetableau

$$\begin{array}{ll} (1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, & (P_1 P_2 P_j) \\ 1, i, i, i, i, -i, -i, -i, -i, & (P_1 P_3 P_j) \\ -i, -i, -i, -i, i, i, i, i, & (P_1 P_4 P_j) \\ -1, i, -i, -i, -i, i, i, & \\ -i, i, -i, -i, i, i, & \\ -1, i, i, -i, -i, & \\ i, i, -i, -i, & \\ -1, -i, i, & \\ i, -i, & \\ -1, \dots) & \end{array}$$

Sie hat Automorphismen

$$R = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & (1-i)\sqrt{2} \\ 1 & -1 & (-1+i)\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, die die Permutationen

$[P_1][P_2][P_3][P_4][P_5P_8P_6P_7][P_9P_{11}P_{10}P_{12}]$,
 $[P_1P_4P_2P_3][P_5][P_6][P_7][P_8][P_9P_{12}P_{10}P_{11}]$,
 $[P_1P_5P_{12}][P_2P_6P_{11}][P_3P_8P_{10}][P_4P_7P_9]$ und
 $[P_1P_5][P_2P_6][P_3P_7][P_4P_8][P_9P_{12}][P_{10}P_{11}]$ induzieren.

Sie erzeugen die Gruppe

$$G_{9,2} = \langle R, S, T, U \mid R^4 = S^4 = T^3 = U^2 = 1, R^S = R, R^T = R^3S^3, S^T = R, \\ R^U = S, S^U = R, T^U = RT^2 \rangle.$$

Diese Gruppe operiert transitiv auf den Flachpunkten,
 die Standuntergruppe von P_1 wird von T^2U erzeugt,
 sie ist zyklisch von der Ordnung 8;

T^2U induziert $[P_1][P_2][P_3P_4][P_5P_{12}P_7P_{10}P_6P_{11}P_8P_9]$.

Sei ein Lagemorphismus gegeben. Wir können einen
 Automorphismus dahinterschalten, sodaß der resultierende
 Lagemorphismus P_1 festläßt. Dann bleibt auch
 $\{P_2, P_3, P_4\}$ fest. Weiter können wir annehmen, daß
 auch P_5 festbleibt und damit $\{P_6, P_7, P_8\}$. Wegen
 $(P_1P_2P_5) = (P_1P_5P_6) = -1$ werden auch P_2 und P_6 auf
 sich abgebildet.

$(P_1P_3P_5) = -(P_1P_4P_5) = i = (P_1P_5P_7) = -(P_1P_5P_8)$ erfordert,
 daß P_3, P_4, P_7 und P_8 Fixpunkte sind. Mit

$(P_1P_5P_9) = (P_1P_5P_{10}) = -(P_1P_5P_{11}) = -(P_1P_5P_{12})$ und
 $(P_1P_9P_{12}) = (P_1P_{10}P_{11}) = i$ haben wir die Identität oder
 $[P_1][P_2][P_3][P_4][P_5][P_6][P_7][P_8][P_9P_{10}][P_{11}P_{12}]$.

Die Transformation, die P_1, P_2, P_5 mit den Tangenten
 festläßt, ist aber schon die Identität.

Daher ist $G_{9,2}$ die volle Automorphismengruppe, sie
 hat 96 Elemente.

Die Quartik wird durch ein reelles Polynom beschrie-
 ben, daher ist $(x:y:z) \mapsto (\bar{x}:\bar{y}:\bar{z})$ ein antianaly-

tischer Automorphismus.

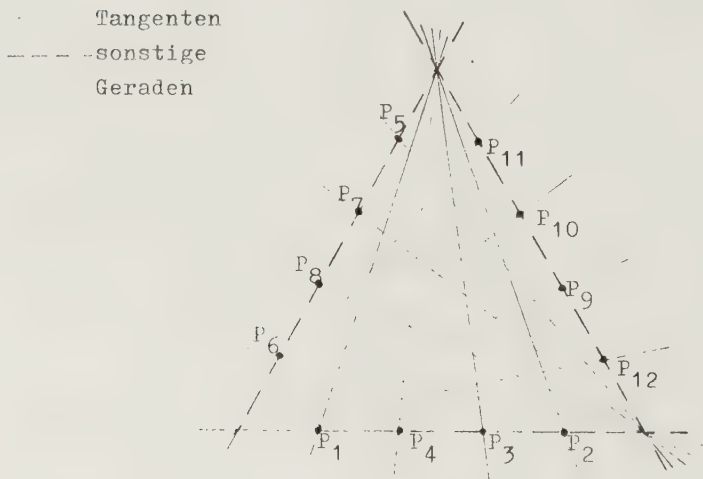
Genau dann ist eine Quartik isomorph zur beschriebenen, wenn es drei Geraden gibt, die 12 Flachpunkte ausschneiden.

Es gibt dann zwölf Quadriken, die in vier Flachpunkten berühren, nämlich in P_1, P_2, P_5, P_6 und den Bildern dieser Flachpunkte unter den Automorphismen.

Diese Quartik ist isomorph zur Fermat'schen Quartik

$$\{x^4 + y^4 + z^4 = 0\}.$$

Zur Abbildung: die Automorphismengruppe wirkt so auf den Flachpunkten, daß lediglich die zyklische Vertauschung der drei Geraden im reellen Bild berücksichtigt werden konnte.



$$2.9.3 \quad \underline{T_{9.3} = (1, 1, -1, -1, -1, -1, i, 1, i, i, i, i, -1, -i, -i, -i, -i, -i, -1, i, -i, -i, -i, i, -1, -1, i, -1, \dots)}$$

Wir haben eine isomorphe Quartik $Q_{8.2}(p)$.

Wegen $(P_1 P_3 P_9) = i(P_2 P_3 P_9) = -1$ liegt P_9 nach 1.6 auf der Geraden

$$\{X + (-1+i)pY - i(p+1)Z = 0\} \text{ sowie wegen}$$

$$(P_1 P_4 P_9) = -(P_2 P_4 P_9) = i \text{ auf}$$

$$\{X + (\frac{1}{2}-\frac{i}{2})pY + (-\frac{1}{2}+\frac{i}{2})(p+1)Z = 0\}. \text{ Deshalb ist}$$

$$P_9 = (\frac{p+1}{3} : \frac{(2-i)(p+1)}{3p} : 1).$$

Wegen $(P_2 P_5 P_9) = 1$ ist $p=2$.

Definition: Sei $Q_{9.3}(0) = Q_{8.2}(2)$, $M_{9.3} = \{0\}$,

$$G_{9.3} = S_4, \quad n'(9.3) = 12.$$

Die nichtsinguläre Quartik $Q_{9.3}(0) =$

$$= \{5Z^4 - 18XYZ^2 + 6X^2YZ + 12XY^2Z - X^3Y - 4XY^3 = 0\} \text{ hat}$$

12 Flachpunkte

$$P_1 = (1:0:0) \quad P_2 = (0:1:0) \quad P_3 = (-2i:1:0) \quad P_4 = (2i:1:0)$$

$$P_5 = (1:1:1) \quad P_6 = (2:\frac{1}{2}:1)$$

$$P_7 = (\frac{3}{2}+\frac{i}{2}:\frac{3}{4}-\frac{i}{4}:1) \quad P_8 = (\frac{3}{2}-\frac{i}{2}:\frac{3}{4}+\frac{i}{4}:1)$$

$$P_9 = (1:1-\frac{i}{2}:1) \quad P_{10} = (1:1+\frac{i}{2}:1)$$

$$P_{11} = (2-i:\frac{1}{2}:1) \quad P_{12} = (2+i:\frac{1}{2}:1) \text{ mit dem Lagetableau}$$

$$\begin{pmatrix} 1, 1, -1, -1, -1, -1, i, -i, -i, i, \\ 1, i, i, i, i, -1, i, -1, -i, \\ -i, -i, -i, -i, -i, -1, i, -1, \\ -1, i, -i, -i, i, -i, i, \\ -i, i, -1, -1, 1, 1, \\ -1, i, -1, -i, -1, \\ -1, i, -1, i, \\ -1, -i, i, \\ -i, i, \\ 1, \dots \end{pmatrix}$$

Sie hat Automorphismen

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -8 \\ 1 & 4 & -4 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -4i & -6+6i \\ 2-i & 2-4i & -5+5i \\ 2 & -4i & -4+4i \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

sie induzieren die Permutationen

$$\begin{aligned} & [P_1 P_2] [P_5 P_6] [P_3 P_4] [P_7 P_8] [P_9 P_{11}] [P_{10} P_{12}], \\ & [P_1 P_6] [P_2 P_5] [P_3 P_8] [P_4 P_7] [P_9 P_{10}] [P_{11} P_{12}], \\ & [P_1 P_9 P_8] [P_2 P_{10} P_4] [P_5 P_{11} P_3] [P_6 P_{12} P_7], \\ & [P_1] [P_5] [P_2 P_6] [P_3 P_{11}] [P_4 P_{12}] [P_7 P_{10}] [P_8 P_9] \quad \text{und erzeugen} \end{aligned}$$

eine Gruppe

$$\langle R, S, T, U \mid R^2 = S^2 = T^3 = U^2 = 1, R^S = R, R^T = RS, S^T = R, \\ R^U = S, S^U = R, T^U = T^2 \rangle \cong S_4.$$

Die Konjugation der Koordinaten $(x:y:z) \mapsto (\bar{x}:\bar{y}:\bar{z})$ ist ein antianalytischer Automorphismus, denn die Quartik wird durch eine reelle Gleichung gegeben.

Sei nun ein Lagemorphismus gegeben. Wir ändern ihn mit einem Automorphismus so ab, daß P_1 fest bleibt (die Automorphismengruppe ist transitiv).

Wegen $(P_1 P_2 P_3) = (P_1 P_2 P_4) = (P_1 P_3 P_4) = (P_1 P_6 P_{11}) = (P_1 P_6 P_{12}) = (P_1 P_{11} P_{12}) = 1$, alle anderen Tripelfunktionen mit P_1 sind $\neq 1$, muß P_2 auf $P_2, P_3, P_4, P_6, P_{11}$ oder P_{12} abgebildet werden.

Mit dem letzten Automorphismus erreichen wir, daß nur P_2, P_3 oder P_4 in Frage kommen.

Die Anzahlen der Werte $j \in \{5, \dots, 12\}$ mit $(P_1 P_2 P_j) = -1$ bzw. $= i$ bzw. $= -i$ ist 4 bzw. 2 bzw. 2. Bei P_3 anstelle P_2 sind sie 2, 5, 1, bei P_4 2, 1, 5. Deshalb bleiben

P_2, P_3 und P_4 fest, mit der analogen Schlußweise erhalten wir, daß auch P_6, P_{11} und P_{12} auf sich abgebildet werden. Aus $(P_1 P_2 P_j) = i = -(P_1 P_2 P_k)$ mit $j, k \in \{5, 7, 8, 9, 10\}$ folgt $j=9$ und $k=10$, auch P_9 und P_{10} sind fix. $(P_1 P_j P_9)$ für $j \in \{5, 7, 8\}$ sind alle verschiedenen, deshalb haben wir die Identität.

Die S_4 ist daher die volle Automorphismengruppe.

Genau dann ist eine Quartik isomorph zur $Q_{9,3}(0)$, wenn es sechs Geraden gibt, die zwölf Flachpunkte ausschneiden.

Es gibt dann 9 Quadriken, die die Quartik in vier Flachpunkten berühren, nämlich in P_1, P_2, P_5, P_6 und in P_1, P_2, P_7, P_8 und in den Bildern von je vier dieser Flachpunkte unter den Automorphismen.

Auf den drei Quadriken der ersten Sorte liegen die vier Berührungspunkte harmonisch, bei der zweiten Sorte nicht.

Je vier Flachpunkte auf einer Geraden liegen harmonisch (nach 2.6.2).

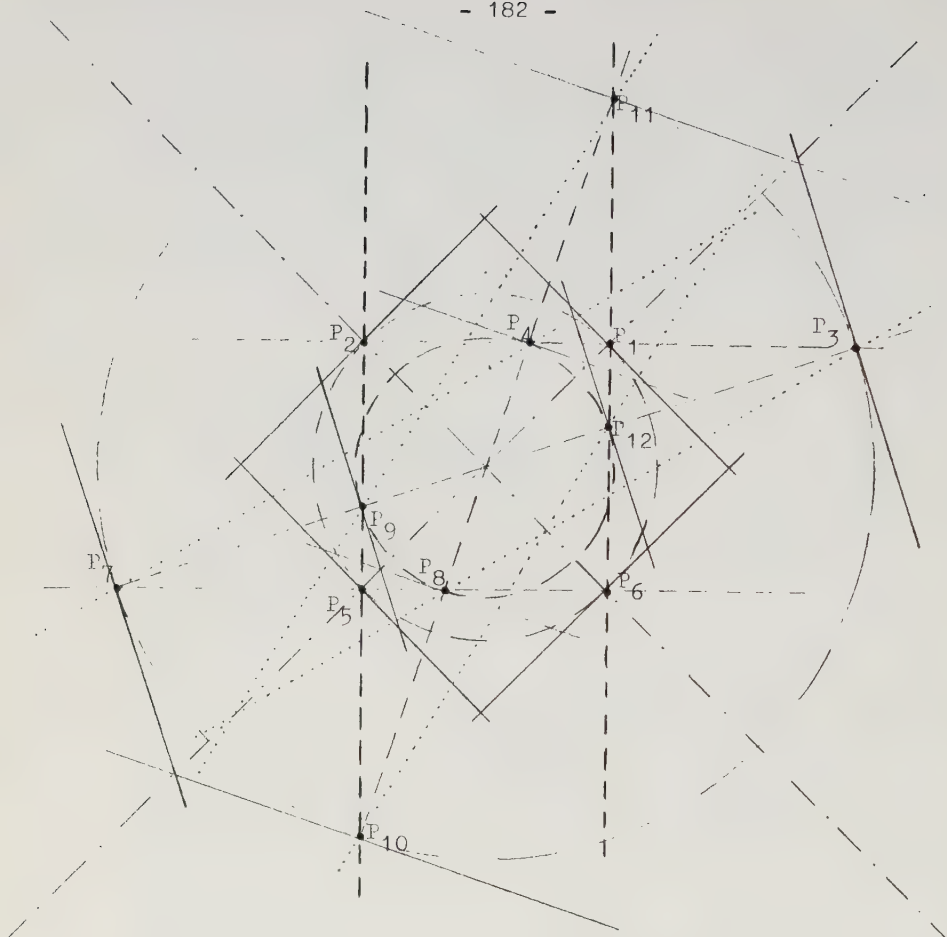
Die Quartik ist isomorph zu

$$\{5Z^4 - 6XYZ^2 - X^3Y + 3X^2Y^2 - XY^3 = 0\}$$

und zu

$$\{X^4 + Y^4 + Z^4 + 3(X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2) = 0\}$$

(die letzte Form wird von [Kuribayashi und Komiya] angegeben).



- Tangenten
- Quadriken (reduzibel
oder irreduzibel)
- - - - - Symmetrieachsen
- Fixpunktgeraden von Involutionen
(nicht in der Abbildung berücksichtigt)

$$n \in \{10, 11, 12\}$$

2.n Quartiken mit n Flachpunkten

Jede Quartik mit $n \geq 9$ Flachpunkten ist isomorph zu einer Quartik $Q_{9,i}(p)$, $p \in M_{9,i}$, mit einem $i \in \{1, 2, 3\}$.

Für $i=1$ haben diese Quartiken jedoch nur 9 Flachpunkte.

Daher haben wir entweder $i=2$ (siehe 2.n.1) oder $i=3$ (siehe 2.n.2).

Im ersten Fall gibt es genau drei Paare (j, k) mit $2 \leq j < k \leq 12$ und $(P_1 P_j P_k) = 1$, im zweiten Fall 6 solche Paare. Die Automorphismengruppen operieren in beiden Fällen transitiv auf den Flachpunkten.

Deshalb gibt es keine Permutation der Flachpunkte, die eines dieser Lagetableaus in ein anderes überführt.

$$n \in \{10, 11, 12\}$$

$$2.n.1 \quad \underline{T}_{n,1} = (\underline{1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1,} \\ \underline{1, i, i, i, i, -i, -i, -i, -i,} \\ \underline{-i, -i, -i, -i, i, i, i, i,} \\ \underline{-1, i, -i, -i, -i, i, i,} \\ \underline{-i, i, -i, -i, i, i,} \\ \underline{-1, i, i, -i, -i,} \\ \underline{i, i, -i, -i,} \\ \underline{-1, -i, i,} \\ \underline{i, -i,} \\ \underline{-1, \dots})$$

Die bis auf Isomorphie einzige Quartik mit diesem Largetableau ist die $Q_{9,2}(0)$.

Definition: $Q_{n,1}(0) = Q_{9,2}(0)$, $M_{n,1} = M_{9,2} = \{0\}$,

$$G_{n,1} = G_{9,2}, \quad n'(n,1) = 12.$$

Diese Quartik hat 12 Flachpunkte, die volle Automorphismengruppe $G_{n,1}$ mit 96 Elementen, einen anti-analytischen Automorphismus wie in 2.9.2 angegeben.

$$n \in \{10, 11, 12\}$$

$$2.n.2 \quad \underline{T_{n.2}} = (\underline{1, 1, -1, -1, -1, -1, i, -i, -i, i,}$$

$$\quad \underline{1, i, i, i, i, -1, i, -1, -i,}$$

$$\quad \underline{-i, -i, -i, -i, -i, -1, i, -1,}$$

$$\quad \underline{-1, i, -i, -i, i, -i, i,}$$

$$\quad \underline{-i, i, -1, -1, 1, 1,}$$

$$\quad \underline{-1, i, -1, -i, -1,}$$

$$\quad \underline{-1, i, -1, i,}$$

$$\quad \underline{-1, -i, i,}$$

$$\quad \underline{-i, i,}$$

$$\quad \underline{1, \dots})$$

Die bis auf Isomorphie einzige Quartik mit diesem Lagetableau ist die $Q_{9.3}(0)$.

Definition: $Q_{n.2}(0) = Q_{9.3}(0)$, $M_{n.2} = M_{9.3} = \{0\}$,

$$G_{n.2} = G_{9.3} = S_4, \quad n'(n.2) = 12.$$

Diese Quartik hat 12 Flachpunkte, die volle Automorphismengruppe S_4 und einen antianalytischen Automorphismus wie in 2.9.3 angegeben.

Literatur

- Ahlfors, Lars V. The Complex Analytic Structure of the
Space of Closed Riemann Surfaces,
in: Analytic Functions, Princeton 1960
- Bers, Lipman Quasiconformal Mappings and Teich-
müller's Theorem,
in: Analytic Functions, Princeton 1960
- Bers, Lipman On Moduli of Riemann Surfaces,
Lectures ETH Zürich, SS 1964
- Duma, Andrei Über die Automorphismen kompakter
Riemann'scher Flächen, Manuskript
- Forster, Otto Riemann'sche Flächen, Berlin 1977
- Gunning, Robert C. Vorlesungen über Riemann'sche Flächen,
Mannheim 1972
- Kato, Takao Non-hyperelliptic Weierstraß Points
of Maximal Weight, Math. Ann. 239
(1979), p.141
- Kato, Takao On Weierstraß Points whose First
Non-Gaps are Three, J.f.d.reine u.
angew. Math. 316 (1980), p.99
- Kuribayashi, A. On Analytic Families of Riemann Sur-
faces with Non-Trivial Automorphisms,
Nagoya Math. J. 28 (1966), p.119
- Kuribayashi, A. On The Equations of Compact Riemann
Surfaces of Genus 3 and the Genera-
lized Teichmüller Spaces, J.Math.
Soc.Japan 28 (1976), p.712

- Kuribayashi, A. und Komiya, K. On Weierstraß Points of Non-Hyperelliptic Compact Riemann Surfaces of Genus 3, Hiroshima Math.J. 7 (1977), p.743
- Kuribayashi, A. und Moriya, R. On Automorphisms of Riemann Surfaces Defined by $y^3 = x(x-1)(x-t_1)(x-t_2)$, Bull.Facul.Sci.&Eng.Chuo Univ. 21 (1978), p.1
- Kuribayashi, A., Moriya, R. und Yoshida, K. On a Family of Non-Hyperelliptic Compact Riemann Surfaces of Genus 3, Bull.Facul.Sci.&Eng.Chuo Univ. 19 (1976), p.1
- Kuribayashi, A. und Yoshida, K. On the Non-Hyperelliptic Compact Riemann Surfaces defined by $y^4 = x(x-1)(x-t)$, Bull.Facul.Sci.&Eng.Chuo Univ. 21 (1978), p.13
- Pinkham, H. Deformation of Curves with G_m Action, Astérisque, Soc.Math.France 20 (1974)
- Rauch, H.E. Weierstraß Points, Branch Points and Moduli of Riemann Surfaces, Comm. Pure&Appl.Math. 12(1959), p.543
- van der Waerden, B.L. Algebra I, Berlin 1971
- Waldi, R. Zur Konstruktion von Weierstraßpunkten mit vorgegebener Halbgruppe, Man.Math. 30 (1980), p.257
- Waldi, R. Äquivalente Deformation monomialer Kurven, Regensburger Schriftenreihe 4 (1980)

Lebenslauf

Name : Ernst Karl Lugert
geboren : 14.11.1953 in Bamberg
Vater : Franz Lugert, Ing. grad.
Mutter : Käthe Lugert, geb. Ernst

Schulbildung:

1.9.1960 - Besuch der Volksschule in
- 19.7.1964 Mistelfeld, Kreis Lichtenfels

9.9.1964 - Besuch des Meranier-Gymnasiums in
- 8.6.1973 Lichtenfels, mathematisch-naturwissen-
schaftlicher Zweig
Abschluß mit dem Zeugnis der Reife,
Durchschnittsnote 1,5

Studium:

2.10.1973 Immatrikulation an der Friedrich-
Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
in den Fächern Mathematik und Physik
8.12.1975 Vorprüfung für das Lehramt an Gymnasien
in Mathematik und Physik,
jeweils Note 1,00
8.3. - Schulpraktikum an der Ioschgeschule
- 19.3.1976 Erlangen (Grundschule)
22.9. - Schulpraktikum am Meranier-Gymnasium
- 15.10.1976 Lichtenfels
7.10.1976 Prüfung in Erziehungswissenschaften
mit Erfolg abgelegt

Lebenslauf

- 19.11.1976 Diplom-Vorprüfung für Mathematik
mit der Gesamtnote "sehr gut"
- 20.7.1978 Diplomprüfung für Mathematik
mit der Gesamtnote "sehr gut"
- 11.12.1978 Wissenschaftliche Prüfung für das
Lehramt an Gymnasien
in Mathematik und Physik
"mit Auszeichnung bestanden" (Gesamtnote 1,11)
- Ab März 1979 Anfertigung der Dissertation bei
Prof. Dr. J. Köhn

Tätigkeiten:

- 1.11.1976 -
- 31.7.1978 Beschäftigung beim Mathematischen Institut
der Universität Erlangen
als studentische Hilfskraft,
Abhalten von Übungen
- 1.11.1978 -
- 30.4.1980 Gleiches als wissenschaftliche Hilfskraft

Frank Kuntz

